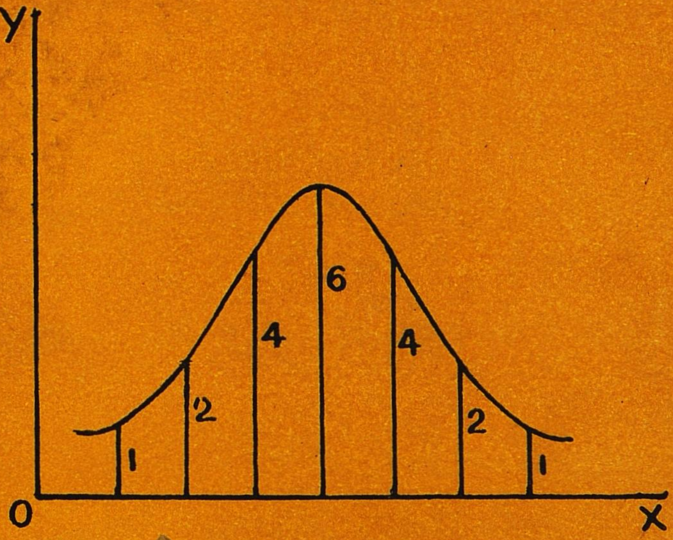
புள்ளியியல்

மேல்நிலை முதலாம் ஆண்டு

தொகுதி. II



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

புள்ளியியல்

தொகுதி II

மேல் நிலை — முதலாம் ஆண்டு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

© தமிழ்நாட்டு அரசு
முதல் பதிப்பு — 1980

பதிப்பாசிரியர் குழுத் தலைவர்
ஆசிரியர் & மதிப்புரையாளர்:

திரு. **மி. சங்கரநாராயணன்**, எம்.ஏ., பி.எஸ்ஸி.,
புள்ளியியல் இணை இயக்குநர்,
புள்ளியியல் துறை,
சென்னை.

மதிப்புரையாளர்கள்:

திரு. **தா.கா. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை**, எம்.ஏ., எல்.டி.,
கணித பேராசிரியர் (ஓய்வு),
அழகப்பா தொழில்நுட்பக் கல்லூரி,
சென்னை.

திரு. **ஆர். அனுமந்தராவ்**, எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
பி.எஸ்.ஜி. கலைக் கல்லூரி,
கோவை.

விலை: ரூ. 8–00

இந்திய அரசு சலுகை விலையில் வழங்கிய 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் இந்நூல் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

அச்சிட்டோர்:
சங்கர் பிரிண்டர்ஸ், சென்னை-600 018.

பொருளடக்கம்

அத்தியாயம் 1

மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள்
(Measures of Central Tendencies)

அதிகளவிலான புள்ளி விவரங்களை எளிதில் புரிந்துகொள்வதற்கும் ஒப்பீடு செய்வதற்கும் ஏதுவாக அட்டவணை, படங்கள் மூலமாகச் சுருக்கலாம் என்பதைப் பற்றி முன்னர் பார்த்தோம்.

இரு வேறு தொழிற் சாலைகளின் தொழிலாளிகளின் ஊதிய சம்பந்தமான பரவல்களை அட்டவணை அடிப்படையில் ஒப்பிட்டு ஒரு குறிப்பிட்ட முடிவிற்கு எளிதில் வரமுடியாது. நமது ஒப்பீடு எளிதாகவும் பயனுள்ளதாகவும் அமைய வேண்டுமானால், கொடுத்துள்ள விவரங்களைக் குறிக்கும் பொதுவான அளவைகள் தேவை. பரவல்களில் உள்ள சில விவர மதிப்புகள் மிக அதிக மாகவும், சில விவர மதிப்புகள் குறைந்த அளவிலும் மீண்டும் மீண்டும் வரலாம். மிக அதிக அளவில் தோன்றும் சில மதிப்புகள் பரவலில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் அல்லது பகுதியில் தோன்றலாம். பெரும்பான்மையும் இத்தகைய அளவுகள் பரவலின் மைய நிலையில் அல்லது மையப் பகுதியில் தோன்றலாம். பரவலில் உள்ள இதர விவரங்கள் யாவும், இம்மைய அளவிற்குச் சமமாகவோ, அல்லது, அதை ஒட்டிச் செல்லும் போக்கு உடையதாகவோ தோன்றும். எனவே, இம்மைய அளவுகள் மைய நிலைப் போக்கு அளவைகளாகக் கருதப் படுகின்றன. அல்லது, நிலை அளவைகள் (Measures of Location) என்றும் கருதப்படும்.

ஒவ்வொரு பக்கமும் 10 மீட்டர் அளவுகள் கொண்ட 100 சதுர வயல் பகுதிகளைத் தாலுகாவின் பல பகுதிகளிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து அதில் உள்ள நெற்பயிரை அறுவடை செய்து மகசூலைக் கணக்கிடுவோம். இந்த 100 வயல்களிலுமிருந்து கிடைத்த மகசூல் ஒன்றிற்கொன்று சமமில்லாது ஒன்றிலிருந்து ஒன்று வேறுபடும் என்பது தெரிந்ததே. உரங்களையும் இதரப் பொருள்களையும் நன்கு பயன்படுத்திய காரணத்தால் சில வயல் களிலிருந்து கிடைத்த மகசூல் மிக அதிகமாக இருக்கலாம்.

இது போன்று, பயிர்களின் நோய் காரணத்தாலும் பாசன வசதி இல்லாத காரணத்தாலும் சில வயல்களிலிருந்து கிடைத்த மகசூல் குறைவாகவும் இருக்கலாம். என்றாலும் இத்தகைய இருவித, மிக அதிக அல்லது மிகக் குறைந்த அளவுள்ள மகசூலைத் தவிர இதர மகசூல்கள் ஒன்றிற்கொன்று அதிக வேறுபாடில்லாமல் மிக நெருக்கமாக இருப்பது தெரிய வரும். வேறுவிதமாகக் கூறினால், அவைகள் யாவும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவைச் சுற்றி குவிந்திருப்பதாகவோ அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட அளவை ஒட்டிச் செல்வதாகவோ தோன்றும். இவ்வாறு இதர அளவுகள் ஒரு முகமாக நோக்கிச் செல்லும் குறிப்பிட்ட அளவை, மைய அளவு என அழைக்கலாம். இத்தகைய மைய மதிப்பை, ஒரு மைய நிலைப் போக்களவை, குவி நிலையளவையாகவும் கருதலாம்.

மைய நிலைப் போக்களவைகளாக பல அளவைகள் உள. அவை சராசரி, (Mean) நடுவன் (Median) மோடு அல்லது முகடு (Mode) என பல தரப்படும். மேலும், சராசரி, கூட்டுச் சராசரி, பெருக்கல் சராசரி, தலைகீழ்ச் சராசரி என்று பலவகைப் படும். கூட்டுச் சராசரி, எளிய சராசரி என்றும் எடைகொள் சராசரி என்றும் மேலும் இருவகைப்படும்.

புள்ளியியல் சராசரியின் பண்புகள்

பலவிதமான சராசரிகள் இருந்த போதிலும் ஒவ்வொன்றிற்கும் சில குறைகளும் நிறைகளும் இருக்கின்றன. எனவே, வெவ்வேறு இடங்களில் வெவ்வேறு சராசரிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எல்லா இடங்களுக்கும் பயன்படுமாறுள்ள ஒரே சராசரி இல்லை என்றே கூறலாம். இடத்தைப் பொறுத்துச் சிறந்ததை எடுக்க வேண்டும். சில நிபந்தனைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் சராசரிகளைச் சிறந்தவையாக எடுக்கலாம்.

1. சிறந்த சராசரி கணித முறையில் எளிதில் கணிக்கப் படக்கூடியதாக இருக்க வேண்டும்.
2. பரவலில் உள்ள எல்லா விவர மதிப்புகளின் அடிப்படையில் அமைந்ததாயிருக்க வேண்டும்.
3. பரவலில் உள்ள மிகக் குறைந்த அல்லது மிக அதிகமான மதிப்புடைய விவரங்களால் பாதிக்கப்படாததாயிருக்க வேண்டும். வேறு விதமாகக் கூறினால், சராசரி இத்தகைய குறைந்த கூடுதலளவுகளின் வேறுபாட்டின் காரணமாக மாற்றமடையாததாயிருக்க வேண்டும்.
4. கணிப்பு முறை புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதாகவும் கையாள்வதற்கு இலகுவாகவும் இருக்க வேண்டும்.

5. குறிக் கணக்கியல் (algebra) செயல் முறைகளுக்கு ஏற்றதாகவும் இருக்க வேண்டும்.

6. கணிப்பு முறையில் ஏற்படும் சிறு மாறுதல் காரணமாக மாற்றமடையாது நிலையான அளவுடையதாகவும் இருக்க வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

சராசரி அல்லது கூட்டுச் சராசரி இரண்டும் ஒன்றே. பொதுவாகப் புள்ளியியலில் சராசரி என்றே கையாளப்படும். பொதுவாகப் பகுக்கப்படாத விவரங்கள், தொடர்பற்ற அலைவெண் பரவல், தொடர்புடைய அலைவெண் பரவல் என்று பலவற்றிற்கும் சராசரி கணிக்கலாம்.

ஒரு பரவலில், பல நபர்களோ அல்லது பல அலகுகளோ (Units) இருக்கலாம். சராசரியின் கணிப்பில், ஒவ்வொரு நபரின் அல்லது அலகின் மதிப்பைக் கூட்டி எல்லா நபர்களின் மொத்த மதிப்பு முதலில் கணிக்கப்படும். இவ்வாறு கிடைத்த மொத்த மதிப்பு பின்னர் பரவலில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கப்பட்டு எல்லோர்க்கும் சமமாகப் பங்கிட்டுச் சராசரி கணிக்கப்படும். இதுவே, எளிய சராசரி அல்லது கூட்டுச் சராசரி அல்லது சுருக்கமாக சராசரி எனப்படும். இது நேர் முறையாகும்.

கீழே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டை நோக்குவோம்.

5 பொதிகளின் எடைகள் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு பொதியின் சராசரி எடையைக் கணக்கிடுவோம்.

பொதிகளின் எடையைப் பொதுவாக 'X' என்று குறிப்பிடுவோம். பொதிகளின் வரிசை எண்ணிக்கையை 1, 2, 3, 4, 5 என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

அடையாள எடை	அசல் எடை (கி.கி.)
x_1	45
x_2	50
x_3	65
x_4	75
x_5	40

$$சராசரி = \frac{45 + 50 + 65 + 75 + 40}{5}$$

$$= \frac{275}{5} = 55 \text{ கி.கி.}$$

பொதுவாக 'X' என்ற குறி எடையைக் குறிப்பதாகயிருந்தால் '$\bar{x}$' என்ற குறி, சராசரி எடையைக் குறிப்பதாகும். பரவலில் உள்ள நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை N அல்லது 'n' என்று குறிப்பிடப்படும்.

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$$

என்பது வெவ்வேறு 'n' அலகுகளின் மதிப்பானால் $\bar{x}$ என்ற சராசரி கீழ்க் கண்டவாறு எழுதப்படும். கொடுத்துள்ள எடுத்துக் காட்டில் 'n' என்பது '5' ஆகும்.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

மொத்த எண்ணிக்கையை N அல்லது 'n' என்றோ எழுதலாம். 's' என்ற எழுத்து 'கூட்டுதல்' என்ற பொருளைத் தருவதாகும். கிரேக்க மொழியில் Σ (Sigma) என்று எழுதப்படும். பரவலில் உள்ள முதல் நபரின் எண்ணிக்கை Σ என்ற குறியிட்டின் அடியிலும், கடைசி நபரின் எண்ணிக்கை Σ அடையாளத்தின் மேல் பாகத்திலும் எழுதப்பெறும்.

$$\text{எனவே சராசரி} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

'n' என்பது நிலையான எண்ணாயிருப்பதால் $\frac{1}{n} \Sigma x_i$ என்றும் எழுதப்படும். இதில் (i) என்ற எழுத்துக் கற்பனை நபரின் (imaginary) வரிசை எண்ணாகும்.

எல்லா நபர்களின் மொத்த மதிப்பை நபர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் சராசரி கிடைக்கும்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$\text{சராசரி} = \frac{\text{நபர்களின் மொத்த மதிப்பு}}{\text{நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

எனவே, சராசரியை நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை யால் பெருக்கினால் எல்லா நபர்களின் மொத்த மதிப்புக் கிடைக் கும்.

$$n \times \bar{x} = \Sigma x$$

$$n \bar{x} = \Sigma x$$

எனவே, எல்லா நபர்களின் மொத்த மதிப்பிலிருந்து சரா சரியை நபர்களின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கிக் கிடைத்த மதிப் பைக் கழித்தால் கிடைக்கும் மீதி '0' ஆகும்.

$$\Sigma x - n\bar{x} = 0$$

கூட்டுச் சராசரியின் குணங்கள்

பரவலில் உள்ள சில நபர்களின் மதிப்பு சராசரியை விட அதிகமாகவும், சில நபர்களின் மதிப்பு சராசரியை விடக் குறைவாகவுமிருக்கும். எனவே, நபர்களின் மதிப்பைப் பொறுத்து, சராசரிக்கும் தனி நபர் மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடு (+) நேராகவோ அல்லது (—) எதிர்மறையாகவோ இருக்கலாம். இத்தகைய வேறுபாடு, வேறு விதமாக விலக்கம் (Deviation) எனப்படும். எல்லா வேறுபாடுகளின் மொத்தக் கூட்டு மதிப்பு '0' வாக அமையும். இது கூட்டுச் சராசரியின் முக்கியமான குண மாகும். இதைக் கீழ்க் கண்டவாறு நிரூபிக்கலாம்.

	மதிப்பு x_i (1)	விலக்கம் $(di) = (x_i - \bar{x})$ (2)
	45	$45 - 55 = -10$
	50	$50 - 55 = -5$
	65	$65 - 55 = +10$
	75	$75 - 55 = +20$
	40	$40 - 55 = -15$
மொத்தம்	275	0

$$\text{சராசரி} \ \frac{275}{5} = 55$$

இரண்டாவது காலத்தில் கொடுத்துள்ள விவரத்தை இரு பகுதிகளாகக் கீழே கொடுத்துள்ளது போல் பிரித்தும் பார்க்கலாம்.

முதற் பகுதி	இரண்டாம் பகுதி
45	– 55
50	– 55
65	– 55
75	– 55
40	– 55
275	–275 = 0

இரண்டு பகுதியின் மொத்தத்தைக் கண்டு பிடிப்போம். முதல் பகுதியின் மொத்த மதிப்பு, கொடுத்துள்ள விவரங்களின் மொத்த மதிப்பிற்குச் சமமாகும். இரண்டாவது பகுதியின் மொத்தம், சராசரியை நபர்களின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கிக் கிடைத்த தொகைக்குச் சமமாகும். இப்பெருக்குத் தொகை, கொடுத்துள்ள விவரங்களின் மொத்த மதிப்பிற்குச் சமமாகும். எனவே இரண்டிற்கும் உள்ள வேறுபாடு 0 ஆகும். இனி விதிகளைக் கவனிக்கலாம்.

மதிப்பு (x_i)	வேறுபாடு (d)
x_1	$x_1 - \bar{x} = d_1$
x_2	$x_2 - \bar{x} = d_2$
x_3	$x_3 - \bar{x} = d_3$
x_4	$x_4 - \bar{x} = d_4$
x_5	$x_5 - \bar{x} = d_5$

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = \sum_{i=1}^{5} d_i$$

$$= (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + (x_4 - \bar{x}) + (x_5 - \bar{x})$$

அடைப்புக்குறிகளை அகற்றி விட்டு நேர்மதிப்புகளையும் எதிர்மறை மதிப்புகளையும் தனித்தனியாகக் கூட்டிக் கோர்வையின் மதிப்புக் காண்போம். இம்மதிப்பு எப்போதும் '0' என்றே இருக்கும். இது கூட்டுச் சராசரியின் தனிப்பட்டதோர் குணமாகும்.

$$x - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + x_3 - \bar{x} + x_4 - \bar{x} + x_5 - \bar{x}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (\bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + \bar{x})$$

$$= \Sigma x_i - 5\bar{x} = 0.$$

$$= \Sigma x_i - n\bar{x} = 0.$$

கூட்டுச் சராசரியின் கணிப்பு

கூட்டுச் சராசரியைக் கணிப்பதற்குப் பல முறைகள் உள. கணிப்பு முறையை இலகுவாக்கிக் காலத்தை மிச்சப்படுத்துவது தான் எல்லா முறைகளிலும் உள்ள குறிக்கோள்.

ஒரு தொழிற் சாலையில் உள்ள 10 நபர்களின் ஊதியம் கீழ் வருமாறு. இவர்களின் சராசரி ஊதியம் கணக்கிடுவோம்.

முதல் முறை

தொழிலாளியின் வரிசை எண்	ஊதியம் ரூபாய்
1	115
2	112
3	117
4	118
5	111
6	115
7	112
8	119
9	111
10	110
மொத்தம்	1140

$$\text{சராசரி ஊதியம்} = \frac{1140}{10} = \text{ரூ. } 114$$

தொழிலாளிகளின் ஊதியத்தை மீண்டும் கவனிப்போம். சில நபர்களின் ஊதியம் ஒன்று போல் உளது; வேறு விதமாகக் கூறினால், ஒரே ஊதியம் உடையோர் பலர் உளர். ஒரே ஊதியம் பல முறை வந்துள்ளது. எனவே இதை மாற்றி எழுதலாம்.

இரண்டாவது முறை

ஊதியம் (1) ரூ.	தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கை (2)	மொத்த ஊதியம் (3) ரூ.
115	2	230
112	2	224
117	1	117
118	1	118
111	2	222
119	1	119
110	1	110
மொத்தம்	10	1140

மொத்த ஊதியம் = 1140 ரூ.

$$\text{சராசரி ஊதியம்} = \frac{1140}{10} = \text{ரூ. } 114.$$

இவ்விரு முறைகளிலும் கணித்த சராசரி ஊதியம் ஒன்றே. முதல் முறையில் எல்லா நபர்களின் ஊதியத்தை நேரடியாக ஒன்றாகக் கூட்டி பின்னர் சராசரி கணித்தோம். இரண்டாவது முறையில் ஒவ்வொரு ஊதிய மதிப்பிற்கும் உள்ள அலை வெண்ணை இரண்டாவது நிரை வரிசையில் கொடுத்துள்ளது போல் கணித்தோம். பின்னர் மூன்றாவது நிரை வரிசையில் கொடுத்துள்ளது போல் ஊதியத்தை, தொழிலாளிகளின் அலை வெண்ணால் பெருக்கி அப்பிரிவிற்குரிய மொத்த ஊதியத்தைக் கணித்தோம். பின்னர் 3வது காலத்தில் கொடுத்த மொத்த ஊதியத்தை இரண்டாவது காலத்தில் உள்ள மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துத் தனி நபர் சராசரி கண்டு பிடித்தோம். ஒவ்வொரு ஊதியத்திற்கான அலைவெண் கண்டு பிடிப்பது உண் மையில் விவரங்களைப் பகுத்து அலைவெண் அட்டவணை தயார்

செய்வதற்கு ஒப்பாகும். ஆனால் இந்த அலைவெண் அட்டவணையில் பிரிவுகளுக்கான வகுப்பெல்லைகள் கிடையா. மாறாக, பிரிவுகளின் மைய அளவே உளது. இதுவும் ஒரு சுருங்கிய நேர் முறையே.

மூன்றாவது முறை

கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு தொழிலாளியின் ஊதியம் 100 ரூபாய்க்கு அதிகமானதே. எனவே, ஒவ்வொருவர் ஊதியத்திலிருந்தும் ரூ 100ஐக் கழித்து மீதியைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

தொழிலாளிகளின் வரிசை எண்	(அசல் ஊதியம்—ரூ. 100)
1	15
2	12
3	17
4	18
5	11
6	15
7	12
8	19
9	11
10	10
மொத்தம்	140

$$\text{சராசரி} = \frac{140}{10} = 14 \text{ ரூபாய்}$$

முதலில் ஒவ்வொருவரின் ஊதியத்திலிருந்தும் 100 ரூபா யைக் கழித்துப் பின்னர் சராசரி கண்டு பிடித்தோம். எனவே தற்போது கணித்த சராசரியான 14 ரூபாயுடன் 100 ரூபாயைக் கூட்டித் தொழிலாளிகளின் சராசரி ஊதியம் கணக்கிட வேண்டும்.

∴ சராசரி ஊதியம் = 14+100 = ரூபாய் 114.

முதலில் தொழிலாளிகள் ஊதியத்தை, ஒரு ரூபாய் நாணயமாக வாங்குவதோடு ஒப்பிடுவோம். ஊதியம் பூராவும் ஒரு ரூபாய் நாணயமாகயிருந்தால் எண்ணுவதிலும், வீட்டிற்கு எடுத்துச் செல்வதிலும் சிரமம் ஏற்படும். எனவே, தொழிலாளிகள் ஊதியத்தை ஒரு 100 ரூபாய் நோட்டும், மீதியை ஒரு ரூபாய் நோட்டுகளாகவும் மாற்றிச் செல்வதாக வைத்துக் கொள்வோம். ஆனால் அவர்களுக்கு வீட்டில் அன்றாடச் செலவிற்காக ஒரு ரூபாய் நாணயங்கள் தேவைப்படும். எனவே மீண்டும் 100 ரூபாய் நோட்டை ஒரு ரூபாய் நாணயமாக மாற்றுவர்.

தெளிவாகப் புரிந்து கொள்வதற்காக ஒரு ரூபாய் நாணயத்தை x என்றும், 100 ரூபாய் நோட்டாக மாற்றிய பின்னர் உள்ள ஊதியத்தை d என்றும் வைத்துக் கொள்வோம். சராசரிக்குரிய விதிமுறை கீழ்க் கண்டவாறு மாறும்.

$d = x - 100$ என வைத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore \bar{d} = \bar{x} - 100$

$\therefore \bar{d} + 100 = \bar{x}$

இச்சுருக்கு முறையை முன்னர் உள்ள இரண்டாவது முறையில் பின்பற்றுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு

118 ரூபாயை ஒரு விருப்பு அளவாக எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே $d = x - 118$ என்று மாற்றுவோம்.

$d = x - 118$	தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கை	மொத்த மதிப்பு
$115 - 118 = -3$	2	-6
$112 - 118 = -6$	2	-12
$117 - 118 = -1$	1	-1
$118 - 118 = -0$	1	0
$111 - 118 = -7$	2	-14
$119 - 118 = 1$	1	1
$110 - 118 = -8$	1	-8
மொத்தம்	10	-40

$$\text{சராசரி} \quad \bar{d} = \frac{-40}{10} = -4.$$

$$\therefore \bar{d} = \bar{x} - 118$$

$$\therefore \bar{x} = \bar{d} + 118$$

$$= -4 + 118 = +114$$

முன்னர், நடுவில் உள்ள 118ஐ விருப்பளவாக எடுத்தது போலில்லாமல் 115 என்ற இன்னொரு அளவை விருப்பளவாக எடுப்போம். பின்னர் கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$d = x - 115$	தொழிலாளிகளின் எண்ணிக்கை	மொத்த மதிப்பு
$115 - 115 = 0$	2	0
$112 - 115 = -3$	2	-6
$117 - 115 = 2$	1	2
$118 - 115 = 3$	1	3
$111 - 115 = -4$	2	-8
$119 - 115 = 4$	1	4
$110 - 115 = -5$	1	-5
மொத்தம்	10	-10

$$\bar{d} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \bar{d} + 115$$

$$= -1 + 115 = 114.$$

நாம் பலவிதமான விருப்பு அளவுகளை எடுத்த போதிலும், கணிப்பு முறைகளும் கணித்துக் கிடைத்த சராசரி அளவுகளும் ஒன்றே.

பல சுருக்கு முறைகளும் உள. நாம் அவற்றில் உள்ள பயன்களைக் காண்போம். கீழே கொடுத்துள்ள 10 நபர்களின் சம்பளத்திற்கான சராசரியைக் கணிப்போம்.

சுருக்கு முறை 1

தொழிலாளர் வரிசை எண் (1)	சம்பளம் ரூபாய் (x) (2)	சுருக்கு முறை A=155 $\bar{d}=x-155$ (3)
1	135	135 − 155 = −20
2	145	145 − 155 = −10
3	180	180 − 155 = 25
4	185	185 − 155 = 30
5	195	195 − 155 = 40
6	155	155 − 155 = 0
7	170	170 − 155 = 15
8	130	130 − 155 = −25
9	140	140 − 155 = −15
10	165	165 − 155 = 10
மொத்தம்	1600	50

$$\text{சராசரி} = \bar{d} = \frac{\Sigma d}{n}$$

$$= \frac{50}{10} = 5.$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \bar{d} + A$$

$$= 5+155 = \text{ரூ. } 160.$$

நாம் முதலில் ஒவ்வொருவரின் சம்பள மதிப்பிலிருந்து 155ஐக் கழித்ததால், புதிதாகவுள்ள விலை மதிப்பின் சராசரியுடன் 155ஐக் கூட்டி, முதல் மதிப்பிற்கான சராசரி கணிக்க வேண்டும். இப்போது கையாள வேண்டிய செயல் முறை முதலில் கை யாண்ட செயல் முறைக்கு நேர் எதிரானது.

நேர் முறையில் 10 தொழிலாளர்களின் மொத்த சம்பளம் ரூ.1600–(இரண்டாவது நிரை வரிசையமைப்பு) எனவே நேர் முறையில் சராசரி ரூ.160. இரு முறைகளிலும் சராசரி விடை ஒன்றே. இம் மாதிரி சராசரி கணிப்பது 'அடிப்படை மாற்றம்' (Shifting the base) எனப்படும்.

பொது முறை

மதிப்பு x_i	A யிலிருந்து விலக்கம் d_i
x_1	$x_1 - A$
x_2	$x_2 - A$
x_3	$x_3 - A$
..	..
x_n	$x_n - A$

மொத்த விலக்கம்

$$\Sigma d_i = (x_1 - A) + (x_2 - A) + \dots + (x_n - A)$$

$$= x_1 + x_2 + \dots + x_n - nA$$

$$= \Sigma x - nA$$

$$= n\bar{x} - nA$$

$$\frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{n\bar{x}}{n} - \frac{nA}{n}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - A$$

$$\bar{x} = \bar{d} + A$$

சுருக்கு முறை 2

முதல் வழியில், ஒரு பொதுவான விருப்பளவை ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் கழித்தது போலன்றி இம்முறையில் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஒரு பொதுவான அளவால் வகுக்க வேண்டும். முன்னர் எடுத்த அதே எடுத்துக்காட்டை ஈண்டு கவனிப்போம். தொழிலாளர்களின் சம்பளத்தை 5 என்ற பொது அளவால் வகுப்போம்.

தொழிலாளர் வரிசை எண்	சம்பளம் ரூ. (X)	$d = x/5$
(1)	(2)	(3)
1	135	135 ÷ 5 = 27
2	145	145 ÷ 5 = 29
3	180	180 ÷ 5 = 36
4	185	185 ÷ 5 = 37
5	195	195 ÷ 5 = 39
6	155	155 ÷ 5 = 31
7	170	170 ÷ 5 = 34
8	130	130 ÷ 5 = 26
9	140	140 ÷ 5 = 28
10	165	165 ÷ 5 = 33
மொத்தம்	1600	320

மொத்தம் $= \Sigma d = 320$

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d}{n} = \frac{320}{10} = 32$$

நாம், $d = \frac{x}{5}$ என்று வைத்துக் கொண்டோம்.

எனவே $5d = x; \quad x = 5d.$

$\therefore \quad \bar{x} = 5\bar{d} = 5 \times 32 =$ Rs. $160.$

இம்மாதிரிக் கணிப்பு 'அளவை மாற்றம்' 'Change of scale' எனப்படும். நமது அன்றாட வாழ்க்கை அனுபவத்தோடு இதை ஒப்பிடலாம். தொழிலாளர்கள் தங்கள் ஊதியத்தை ஒரு ரூபாய் நாணயமாகப் பெற்றார்கள் எனக் கருதலாம். அப்படியாயின் எண்ணுவதிலும் எடுத்துச் செல்வதிலும் சிரமம் ஏற்படுவதால் தமது ஊதியத்தை 5 ரூபாய் நோட்டாக மாற்றுவர். ஒரு ரூபாய் நாணயத்தின் எண்ணிக்கை இரண்டாவது காலத்திலும் 5 ரூபாய் நோட்டின் எண்ணிக்கை 3வது காலத்திலும் கொடுக் கப்பட்டுள்ளன. ஒரு தொழிலாளி சராசரி பெறும் 5 ரூபாய் நோட்டின் எண்ணிக்கை 32. வங்கியில் ஒவ்வொரு 5 ரூபாய் நோட்டும் 5 ஒரு ரூபாய் நோட்டாக மாற்றப்படலாம். எனவே 32 நோட்டுகளும் (5 ரூபாய்களும்) $32 \times 5 = 160$ ஒற்றை ரூபாய் நோட்டாகவோ அல்லது நாணயமாகவோ மாற்றப் படலாம்.

முதலில் ஒவ்வொருவர் சம்பளத்தையும் 5 கொண்டு வகுத்த காரணத்தால் புதிதாகக் கிடைத்த சராசரியை 5 கொண்டு பெருக்கி முதல் மதிப்பின் சராசரி கணிக்க வேண்டும். இங்கு கையாண்ட முறை முதலில் கையாண்ட முறைக்கு நேர் எதி ரானது.

சுருக்கு முறை 3

அடிப்படையும் மற்றும் அளவையும் மாற்றி கணித்தல்

முன்னர் கூறிய இரு வழிகளையும் ஒரே சமயத்தில் கை யாளும் வேறு ஒரு முறையும் உண்டு. இவ்வழியில் முதலில் ஒவ் வொரு மதிப்பிலிருந்தும் ஒரு பொதுவான விருப்பளவைக் கழித்துப் பின்னர் கிடைத்த அளவை ஒரு பொது அளவால் வகுக்க வேண்டும். இங்கு பொதுவான ஒரு வகுத்தல் காரணி இல்லாது போனால் இம்முறை சற்றுச் சிரமமாக இருக்கும்.

வரிசை எண்	சம்பளம் ரூ.	$y = x - 100$	$z = \frac{(x-100)}{5} = \frac{y}{5}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1	135	35	7
2	145	45	9
3	180	80	16
4	185	85	17
5	195	95	19
6	155	55	11
7	170	70	14
8	130	30	6
9	140	40	8
10	165	65	13
மொத்தம்	1600	600	120

சராசரி $= \quad \frac{1600}{10} \qquad \frac{600}{10} \qquad \frac{120}{10}$

அதாவது $\bar{x} = 160 \qquad \bar{y} = 60 \qquad \bar{z} = 12$

$\bar{x} = 60 + 100$

$= 160$

$5\bar{z} + 100$

$= 5 \times 12 + 100$

$= 60 + 100$

$=$ ரூ. 160

முதல் வழியில் கூறியது போல் x என்ற ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் 100 ஐக் கழித்து அதை 'y' என்றழைத்து 3வது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பின்னர் ஒவ்வொரு 'y' மதிப்பும் 5 என்ற பொது அளவால் இரண்டாவது முறையில் கூறியது போல் வகுத்து 'z' என்றழைத்து நான்காவது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இங்கு 'x' என்ற மதிப்பை 'z' என்ற மதிப்பாக மாற்றுவதில் கீழே உள்ள செயல் முறைகள் வரன் முறையாகப் பின் பற்றப்பட்டுள்ளன.

(1) ஒவ்வொரு 'x' மதிப்பிலிருந்து 100 ஐக் கழித்து 'y' யாக மாற்றப்பட்டுள்ளது.

(2) ஒவ்வொரு 'y' மதிப்பும் 5 கொண்டு வகுக்கப் பெற்று 'z' என்று மாற்றப்பட்டுள்ளது.

$$z = \frac{y}{5} = \frac{x - 100}{5} \; ; \quad \bar{z} = \frac{\bar{y}}{5} = \frac{\bar{x} - 100}{5}$$

$$\therefore \; 5\bar{z} = \bar{x} - 100$$

$$\bar{x} = 5\bar{z} + 100$$

$$= 5 \times 12 + 100$$

$$= 60 + 100$$

$$= 160 = \text{ரூ. } 160$$

நாம் கையாண்ட வழிகளில் 5 கொண்டு y யை வகுத்தது கடைசி செயல் முறையாகயிருப்பதால். $\bar{z}$ ஐ 5 கொண்டு முதலில் பெருக்க வேண்டும். x லிருந்து 100 ஐக் கழித்தது முதல் செயல் முறையானதால், $\bar{z}$-ஐ 5 கொண்டு பெருக்கிக் கிடைத்த $\bar{y}$ உடன் 100 ஐக் கூட்ட வேண்டும். இப்பொழுதுள்ள செயல் முறைகள் முதலில் உள்ள முறைகளுக்கு நேர் எதிரானதும் தலைகீழ் வரிசையிலும் கையாளப்படுகின்றன.

பொதுவாக முதல் இரண்டு முறைகளின் கலப்பான இம் மூன்றாவது முறையே கையாளப்படுகிறது. விருப்பளவு 'A' என்றும் பொதுவாக வகுக்குமளவு 'C' என்றும் குறிக்கப்படும். விதி முறை கீழ்க் கண்டவாறு மாறும்.

$$d = \frac{x - A}{C}$$

$$\bar{d} = \frac{\bar{x} - A}{C}$$

$$c.\bar{d}. = \bar{x} - A$$

$$\therefore \quad \bar{x} = c.\bar{d} + A$$

தொடர்பற்ற பரவலின் சராசரி (Mean of Discrete Frequency Distribution)

1. நேர் முறை

கீழே உள்ள அலைவெண் பரவலைக் காண்போம்.

மதிப்பு (கி.கி.) x	அலைவெண் f	மொத்த மதிப்பு fx
15 x_1	3 f_1	45 $(x_1 f_1)$
12 x_2	4 f_2	48 $(x_2 f_2)$
17 x_3	2 f_3	34 $(x_3 f_3)$
18 x_4	1 f_4	18 $(x_4 f_4)$
	10	145

இங்கு நான்கு x மதிப்புகள் இருப்பதால் அவை முறையே x_1, x_2, x_3, x_4 என்றும் அவைகளின் அலைவெண்கள் முறையே f_1, f_2, f_3 மற்றும் f_4 என்றும் குறிக்கப்பபெறும்.

ஒவ்வொரு xf மதிப்பும், x அளவையும், அலைவெண் அளவையும் பெருக்கி கணிக்கப்படும். எனவே $x_1 f_1$, $x_2 f_2$, $x_3 f_3$, $x_4 f_4$. என்ற நான்கு மதிப்புகள் உண்டு. அவற்றின் மொத்த மதிப்பு $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4$. நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை, அலைவெண்களின் மொத்த மதிப்பிற்குச் சமமாகும்.

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4$

$$\text{சராசரி} = \frac{\text{மொத்த மதிப்பு}}{\text{மொத்த நபர்கள்}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}$$

விதியைக் கீழ் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x.f}{\Sigma f} \text{ (or) } \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$\bar{x} = \frac{45 + 48 + 34 + 18}{3+4+2+1} = \frac{145}{10} = \mathbf{14.5} \text{ கி.கி.}$$

சுருக்கு முறை 1 – அடிப்படை மாற்றம்

சுருக்கு முறைகளைக் கையாளலாம். '10' என்ற அளவை விருப்பளவாகக் கருதலாம். அலைவெண்களில் எவ்வித மாற்றமுமின்றி மதிப்புகள் கீழ்க் கண்டவாறு மாறும்.

'd'	'f'	'dt'
15 – 10 = 5	3	15
12 – 10 = 2	4	8
17 – 10 = 7	2	14
18 – 10 = 8	1	8
	10	45

$$\text{சராசரி } d = \frac{45}{10} = 4.5$$

$$d = x - 10.$$

$$\bar{d} = \bar{x} - 10$$

$$\therefore \bar{x} = \bar{d} + 10 = 4.5 + 10 = 14.5 \text{ கி.கி.}$$

சுருக்கு முறை 2 — அளவை மாற்றம்

இதில் கொடுத்துள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பும் ஒரு பொது நிலையான அளவால் வகுக்கப்படும்.

x கி.கி. (1)	f (2)	xf (3)	$d = x/15$ (4)	df (5)
60	2	120	4	8
75	4	300	5	20
90	6	540	6	36
105	3	315	7	21
135	5	675	9	45
மொத்தம்	20	1950		130

$$\Sigma xf = 1950; \quad \bar{x} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{1950}{20} = 97.5 \text{ கி.கி.}$$

இங்கு ஒவ்வொரு 'x' மதிப்பும் 15 ஆல் வகுக்கப் பெற்று 3வது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 'd' என்றளவை 'f' என்றளவால் பெருக்கிக் கிடைத்த மதிப்பு 5வது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\Sigma fd \text{ (or) } \Sigma df = 130. \quad \therefore \quad \bar{d} = \frac{130}{20} = 6.5$$

$$d = x/15; \quad \therefore 15\,d = x; \quad \therefore 15\,\bar{d} = \bar{x}; \quad \therefore \bar{x} = 15 \times 6.5 = \mathbf{97.5.}$$

நேர் முறையில் கணித்த சராசரியும் சுருக்கு முறையில் கணித்த சராசரியின் விடையும் ஒன்றாகவே உள்ளது என அறிகிறோம்.

x	f	$d = \frac{x - A}{c}$	fd
x_1	f_1	$d_1 = \frac{x_1 - A}{c}$	$f_1 d_1$
x_2	f_2	$d_2 = \frac{x_2 - A}{c}$	$f_2 d_2$
xn	fn	$dn = \frac{xn - A}{c}$	$fn\ dn$

$$\Sigma fi\ di = f_1 \frac{(x_1 - A)}{c} + f_2 \frac{(x_2 - A)}{c} + \dots + f_n \frac{(xn - A)}{c}$$

$$= 1/c\ (f_1 x_1 - f_1 A + f_2 x_2 - f_2 A + \dots + f_n x_n - f_n A)$$

$$= 1/c\ \{ (f_1 x_1 + f_2 x_2 \dots + f_n x_n) - (f_1 A + f_2 A + \dots f_n A) \}$$

$$= 1/c\ (\Sigma\ xi\, fi - A\ \Sigma\ fi)$$

$$= 1/c\ (\Sigma\ xi\, fi - NA)$$

$$= 1/c\ (N\bar{x} - NA)$$

$$= \frac{N}{C} (\bar{x} - A)$$

Dividing GN

$$\frac{\Sigma\ fidi}{N} = \frac{N}{C} \left\{ \frac{(\bar{x} - A)}{N} \right\}$$

$$\bar{d} = \frac{\bar{x} - A}{C}$$

$$c\bar{d} = \bar{x} - A$$

$$c\bar{d} + A = \bar{x}$$

சுருக்கு முறை 3 – அடிப்படை மற்றும் அளவையும் மாற்றி கணித்தல்

முன்னர் உள்ள இரு சுருக்கு வழிகளையும் கையாள்வோம். முன்னர் உள்ள அதே எடுத்துக்காட்டையே காண்போம். '99'

என்பதை விருப்பளவாக எடுத்து ஒவ்வொரு 'x' மதிப்பிலிருந்தும் கழிப்போம். கழித்துக் கிடைத்த மதிப்பை 15 கொண்டு வகுப்போம்.

x (1)	f (2)	$y = x - 90$ (3)	$d = y/15$ (4)	fd (5)
60	2	$60-90 = -30$	-2	-4
75	4	$75-90 = -15$	-1	-4
90	6	$90-90 = -0$	0	0
105	3	$105-90 = 15$	1	3
135	5	$135-90 = 45$	3	15
	20			10

'x' விருந்து $d = \dfrac{x-90}{15}$ என்ற சமன்பாட்டு முறையில் கணித்த 'd' அளவு நான்காவது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நான்காவது காலத்தில் உள்ள 'd' மதிப்பை அதற்குரிய அலைவெண்ணுல் பெருக்கிக் கிடைத்த மதிப்பு '5'வது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\Sigma fd = 10; \quad \Sigma f = 20$$

$$\therefore \ \bar{d} = 10/20 = 0.5$$

$$\frac{x - 90}{15} = d; \quad \frac{\bar{x} - 90}{15} = \bar{d}$$

$$15 \ \bar{d} = \bar{x} - 90$$

$$\therefore \ \bar{x} = 15 \ \bar{d} + 90$$

$$= 15 \times 0.5 + 90$$

$$= 7.5 + 90 = 97.5$$

தொடர்பற்ற அலைவெண் பரவல்களிலும் சுருக்கு வழிகளைப் பயனுள்ள வழிகளில் பின்பற்றலாம் என்று தெரிகிறது. எல்லா வழிகளிலும் முதலில் கொடுத்த மதிப்பைச் சுருக்கி, கணிப்பு முறையில் நேரத்தையும் வேலைப் பளுவையும் குறைக்கிறோம்.

தொடர்புடை அலைவெண் பரவலின் சராசரி (Mean of a Continuous Frequency Distribution)

முன்னர் கொடுக்கப்பட்ட தொகுக்கப்படா விவரங்களின் அடிப்படையில் தயாரிக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலைப் பார்ப்போம்.

பிரிவு கி.கி.	அலைவெண்
60.5 – 70.5	1
70.5 – 80.5	5
80.5 – 90.5	9
90.5 – 100.5	14
100.5 – 110.5	15
110.5 – 120.5	4
120.5 – 130.5	2
	50

வெவ்வேறு பிரிவுகளையும் அவற்றிற்கான அலைவெண்ணையும் கொண்டுள்ள தொடர்புடை அலைவெண் பரவலில் ஒவ்வொரு வகுப்பிற்குரிய நடுவளவை அல்லது மையளவை முதலில் கணிக்க வேண்டும். இது மிக முக்கியமானது. எனவே பிரிவு எல்லைகள் மாத்திரம் கொடுக்கப்பட்ட பரவல்களுக்கெல்லாம் முதலில் நடுவளவு காண வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவு எல்லைகளின் சராசரி கண்டு பிடித்து பரவலைக் கீழ் கண்டவாறு மாற்றி அமைக்க வேண்டும். பிரிவுகளின் மையளவுகள் கண்டு

பிடித்த பின்னர், எல்லாப் புள்ளியியல் செயல் முறைகளுக்கும் அவற்றையே கையாள வேண்டும். ஒவ்வொரு பிரிவில் அடங்கிய எல்லா விவரங்களும் அப்பிரிவின் மைய அளவிற்குச் சமமாகவே யிருக்கும் என்று கருதப்படுகின்றன. இக்கருத்து சரியன்று. என்றாலும், இக்கோட்பாட்டால் பெரிய இடர்பாடு ஏற்படாது. மாறாக, நன்மையே விளையும்.

வகுப்பு (1)	மையளவு x_i (2)	அலைவெண் f_i (3)	மொத்த எடை $x_i f_i$ (4)
60.5 — 70.5	65.5	1	65.5
70.5 — 80.5	75.5	5	377.5
80.5 — 90.5	85.5	9	769.5
90.5 — 100.5	95.5	14	1337.0
100.5 — 110.5	105.5	15	1582.5
110.5 — 120.5	115.5	4	462.0
120.5 — 130.5	125.5	2	251.0
		50	4845.0

$$\text{சராசரி} = \frac{4845}{50} = 96.9 \text{ கி.கி.}$$

ஓர் எடுத்துக்காட்டில் கொடுத்த விவரங்களின் அடிப் படையில் அமைக்கப்பெற்ற அலைவெண் பரவலே இது. நேரடி யாகக் கணித்த சராசரி 97. நேரடியாகக் கணித்த சராசரிக்கும் தற்போது கணித்த சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு மிகக் குறைவே. (0.01) = (97 – 96.9)

முதல் முறையில் சராசரி கணிப்பது சற்றுக் கடினமானதாக இருந்தாலும் அதுவே மிகவும் சரியானது என்பதை உணர வேண்டும். இரண்டாவது முறையில் உள்ள எளிமையையும் மிகக் குறைந்த வேறுபாட்டையும் கருதுவதாகயிருந்தால் இரண்டாவது முறை பயனுள்ளதாகயிருக்கும். ஒரு பிரிவில் உள்ள எல்லா விவரங்களும் அப்பிரிவின் மைய அளவிற்குச் சமமாக இருக்கும்

என்று முன்னர் கருதியதால் விளைந்த வேறுபாடுதான் இச்சிறு வேறுபாடு. ஆனால் உண்மையில் இத்தகைய கோட்பாடு சரி யானதன்று. எனவே, இந்த வேறுபாடு, விவரங்களைப் பகுப் பதால் விளைந்தது. பிரிவுகளின் இடைவெளி சுருங்குந்தோறும், சராசரியில் உள்ள இவ்வேறுபாடும் குறையும். பிரிவுகளின் இடைவெளி எந்த அளவிற்குச் சுருங்குகிறதோ அந்த அளவிற்கு வேறுபாடு குறைவதோடு அந்த அளவிற்குச் சராசரியின் மதிப்பும் துல்லியமாகும். முதல் முறையில் கணித்த சராசரி உண்மை யான சராசரியாகயிருப்பதால் இரண்டாவது முறையில் கணித்த சராசரி, சராசரியின் மதிப்பீடாகக் கருதப்படும். எனவேதான் இரண்டிற்குமிடையே இச்சிறு வேறுபாடு.

கணிப்பு முறையையே மேலும் எளிதாக்கலாம். இவ் வெளிய முறைகளில் எல்லாம், பிரிவுகளின் மைய அளவுகள் பிரிவின் பிரதிநிதியாகயிருப்பதால் பிரிவுகளின் மைய அளவு களையே கருத்தில் கொள்வோம்.

சுருக்கு முறை 1. அடிப்படை மாற்றம்

முன்னர் தொடர்பற்ற பரவலுக்குப் பயன்படுத்திய அதே முறைகளை இங்கும் கையாள்வோம்.

மையளவு x	அலைவெண் f_i
65.5	1
75.5	5
85.5	9
95.5	14
105.5	15
115.5	4
125.5	2
மொத்தம்	50

மைய அளவுகளின் மதிப்பும் அலைவெண்களின் மதிப்பும் பெரிய அளவில் இருந்தால் அவற்றைப் பெருக்குவது சிரமமாக யிருக்கும். ஆனால் நாம் அலைவெண்ணைச் சுருக்க முடியாது. எனினும், பொதுவான ஒரு விருப்பெண்ணை மைய அளவுகளி லிருந்து கழித்து அவற்றைச் சுருக்கலாம். இங்கு நடுவிலிருக்கும் 95.5 என்ற மையளவை விருப்பளவாக எடுக்கலாம். அட்ட வணையைக் கீழ்கண்டவாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

நடுவளவு (x) (1)	புதியளவு $d = x - 95.5$ (2)	அலை வெண் (f) (3)	பெருக்கு மதிப்பு $(d.f)$ (4)	
65.5	$65.5 - 95.5 = -30$	1	-30	
75.5	$75.5 - 95.5 = -20$	5	-100	-220
85.5	$85.5 - 95.5 = -10$	9	-90	
95.5	$95.5 - 95.5 = 0$	14	0	
105.5	$105.5 - 95.5 = 10$	15	150	
115.5	$115.5 - 95.5 = 20$	4	80	$+290$
125.5	$125.5 - 95.5 = 30$	2	60	
	மொத்தம்	50	70	

'd' என்றதொரு புதிய விவரத்தின் மதிப்புகள் கிடைத் துள்ளன. புதியளவிற்கான சராசரியைக் கணிக்கலாம். புதிய அளவான d யின் மொத்தம் 70. எனவே சராசரி $\frac{70}{50} = 1.4$. ஒவ் வொரு 'd' அளவும் அதற்கேற்ற x அளவைவிட 95.5 குறைவாக யிருக்கும். எனவே 'd' யின் சராசரி அளவும் x ன் சராசரி அளவைவிட 95.5 குறைவாகவேயிருக்கும்.

$$d = x - 95.5$$

$$\bar{d} = \bar{x} - 95.5$$

$$\bar{d} + 95.5 = \bar{x}$$

$$= 1.4 + 95.5 = 96.9$$

இது நாம் முன்பு கணித்ததே. இதுவும் சராசரியின் ஒரு மதிப்பீடே. 'x' அளவைப் பொறுத்தளவில் மதிப்புகள் யாவும் '0' விருந்து கணக்கிடப்படுகின்றன. ஆனால் 'd' அளவைப் பொறுத்தளவில் அவை யாவும் 95.5 என்ற விருப்பளவிலிருந்து எண்ணப்படுகிறது. எனவே இங்கு '0' விருந்து அடிப்படையை 95.5 க்கு மாற்றிப் புதியளவைக் கணிக்கிறோம். எனவே இங்குள்ள செயல் முறையில் அடிப்படை மாற்றம் ஏற்படுகிறது.

அடிப்படையையும் அளவையும் மாற்றி சராசரி கணித்தல்

முன்னர் உள்ள முறையில் சுருக்கிக் கிடைத்த ஒவ்வொரு புதிய 'd' அளவும் 30, 20, 10 என்று எண்ணிக்கையளவில் பெரியதே. இந்த ஒவ்வொரு அளவையும் பிரிவுகளின் இடைவெளியளவால் வகுத்து மேலும் சுருக்கலாம்.

செயல் முறை கீழ் வருமாறு

x (1)	$y = x - 95.5$ (2)	$d = y/10$ (3)	fi (4)	dfi (5)	
65.5	—30	—3	1	— 3	
75.5	—20	—2	5	—10	—22
85.5	—10	—1	9	— 9	
95.5	0	0	14	0	
105.5	10	1	15	15	
115.5	20	2	4	8	+29
125.5	30	3	2	6	
		மொத்தம்	50	7	

d யின் மொத்தம் $= 7$

d யின் சராசரி $\bar{d} = 7/50 = 0.14$

$$d = Y/10 = \frac{Y}{C} \quad \therefore \bar{d} = \frac{\bar{y}}{c}$$

$$= \bar{y} = c \times \bar{d}$$

$$y = x - 95.5 = x - A$$

$$\bar{y} = \bar{x} - 95.5$$

$$c \times \bar{d} = \bar{x} - 95.5$$

$$\bar{x} = c\bar{d} + 95.5$$

$$= 10 \times 0.14 + 95.5$$

$$= 96.9$$

x என்ற பழைய திரிபை d என்ற புதிய திரிபாக மாற்றுவதில் ஏற்பட்ட செயல்முறைகளாவன.

(i) முதலில் ஒரு விருப்பு அளவைக் கழிப்பதும் பின்னர் இரண்டாவது, வகுப்பின் இடைவெளி அளவு கொண்டு வகுப்பதுமாகும். எனவே, புதிய திரிபின் சராசரியிலிருந்து பழைய திரிபின் சராசரி கணிப்பதற்கு, முன்பு கையாண்ட செயல் முறைகளின் நேர் எதிர் முறை வழிகளைப் பின்னோக்கி அல்லது தலை கீழாகக் கையாள வேண்டும்.

முதலில் d என்ற திரிபின் சராசரியை c என்ற வகுப்பின் இடைவெளியால் பெருக்கி, பின்னர் A என்ற விருப்பளவைக் கூட்ட வேண்டும். இதிலும் நாம் கணித்துக் கிடைத்த சராசரி அளவு உண்மையான சராசரியின் அளவிற்குரிய ஒரு மதிப்பீடே. இம்முறை வெப்பளவை பாரன்ஹீட் அளவிலிருந்து சென்டிகிரேட் அளவில் மாற்றுவதற்கும் பின்னர் சென்டிகிரேட் அளவிலிருந்து பாரன்ஹீட் அளவிற்கு மாற்றுவதற்கும் இணையாகும். பாரன்ஹீட், சென்டிகிரேட் என்ற இரு அளவையிலும் மிகக் குறைந்தளவு முறையே 32° மற்றும் 0° ஆகும். இம்முறையில் இரண்டின் அளவைகளும் வேறுபடுகின்றன. ஏனெனில் 180 பாகங்களாக பிரிக்கப்பட்ட பாரன்ஹீட் அளவுகள் 100 பாகங்களாக சென்டிகிரேட் அளவுகளில் பிரிக்கப்படுகின்றன.

பாரன்ஹீட் அளவுகளிலிருந்து சென்டிகிரேட் அளவாக மாற்றுவதற்கு முதலில் நாம் 32° ஐக் கழித்துப் பின்னர்

$\frac{9}{5}$ $\left(\frac{180}{100}\right)$ கொண்டு வகுக்க வேண்டும். சென்டிகிரேடி லிருந்து பாரன்ஹீட் ஆக மாற்றுவதற்கு முதலில் 9/5 கொண்டு பெருக்கிப் பின்னர் 32°ஐக் கூட்ட வேண்டும். எல்லாச் சுருக்கு வழிகளில் கிடைக்கும் சராசரி அளவு ஒன்றாகவே இருக்கும்.

113°Fஐச் செண்டிகிரேட் ஆக மாற்றுதல்

$$113 - 32 = 81 \div 9/5 = 81 \times \frac{5}{9} = 45°. C.$$

குழுக்களின் சராசரி (Mean of the combinations or weighted mean)

A, B, C என்ற மூன்று தனித்தனி குழுக்களைக் கவனிப் போம். ஒவ்வொரு குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக் கையும் சராசரி எடையும் வேறுபாடுடையன. இம்மூன்று குழுக்களையும் ஒன்றாக இணைத்து சராசரி கண்டு பிடிப்போம்.

விவரங்கள் கீழ் வருமாறு.

குழு (1)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (2)	சராசரி எடை (3) கி.கி.	மொத்த எடை (4) கி.கி.
A	10	48	48×10 = 480
B	15	52	52×15 = 780
C	25	40	40×25 = 1000
மொத்தம்	50		2260

$$\text{சராசரி} = \frac{2260}{50} = 45.2 \text{ கி.கி. (ஒவ்வொருவருக்கும்)}$$

முதலில் சற்றுக் கடினமாகக் தோன்றினும் சிந்தித்தால் எளிதாகத் தோன்றும். மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்

கையை 50 என்று கணித்தோம். பின்னர், ஒவ்வொரு பிரிவிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை அவர்களின் சராசரி எடையால் பெருக்கி அப்பிரிவிலுள்ள எல்லா மாணவர்களின் மொத்த எடையைக் கணித்தோம். பிறகு எல்லாப் பிரிவிற்கும் உள்ள எடையைக் கூட்டி மொத்த மாணவர்களின் எடையைக் கண்டு பிடித்தோம். இறுதியில் மாணவர்களின் மொத்த எடையை மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் குழுவிற்கான சராசரி எடையைக் கணித்தோம்.

மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 10 + 15 + 25 = 50$

மாணவர்களின் மொத்த எடை $= (48 \times 10 + 52 \times 15 + 40 \times 25)$

$= 480 + 780 + 1000$

$= 2260$ கி.கி.

சராசரி எடை $= \frac{2260}{50} = 45.2$ கி.கி.

இவர்களின் எளிய சராசரியையும் கணக்கிடலாம். இந்த மூன்று பிரிவிற்குள்ள சராசரி எடைகளைக் கூட்டி, பிரிவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை கொண்டு வகுத்தால் எளிய சராசரி கிடைக்கும்.

மொத்த பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை $= 3$

மூன்று சராசரிகளின் மொத்தம் $= 48 + 52 + 40 = 140$

சராசரி $\frac{140}{3} = 46.7.$ கி.கி.

எளிய சராசரிக்கும், கூட்டுச்சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கவனிப்போம்.

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஒன்று போல் சமமாக இருந்தால் இவ்விரு சராசரிகளும் ஒன்றாக இருக்கும். இங்கு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை அப்பிரிவிற்கான எடையாக மாறுகிறது.

இதைக் குறியீடு முறையில் கவனிப்போம்.

பிரிவு (1)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (2)	சராசரி எடை (3)	மொத்த எடை (4)
A or 1	n_1	$\bar{x}_1$	$n_1 \bar{x}_1$
B or 2	n_2	$\bar{x}_2$	$n_2 \bar{x}_2$
C or 3	n_3	$\bar{x}_3$	$n_3 \bar{x}_3$

$\bar{\bar{x}}$ அல்லது $\bar{x}$ குழுவின் சராசரியாகக் கருதுவோம்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

Let $n_1 + n_2 + n_3 = N$. $\therefore \quad \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{N} = \bar{x}$

மேலுள்ள அட்டவணையைக் கீழ் கண்டவாறு மாற்றி அமைப்போம்.

பிரிவு (1)	சராசரி எடை (2)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (3)	மொத்த எடை (4)
A	x_1 (48)	n_1 (10)	$n_1x_1 = 10 \times 48$
B	x_2 (52)	n_2 (15)	$n_2x_2 = 15 \times 52$
C	x_3 (40)	n_3 (25)	$n_3x_3\ \bar{x}\ 25 \times 40$

இவ்வட்டவணையில் ஒவ்வொரு பிரிவின் சராசரி எடையை x என்ற திரிபாகவும் பிரிவிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்

கையை f என்ற அலைவெண்ணாகவும் கருதுவோம். பின்னர் அட்டவணை கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

மதிப்பு (1) x_i	அலைவெண் (2) f_i	மொத்த எடை (கி.கி.) (3) $x_i f_i$
$\bar{x}_1$ (48)	f_1 (10)	$\bar{x}_1 f_1 = 48 \times 10 = 480.$
$\bar{x}_2$ (52)	f_2 (15)	$\bar{x}_2 f_2 = 52 \times 15 = 780.$
$\bar{x}_3$ (40)	f_3 (25)	$\bar{x}_3 f_3 = 40 \times 25 = 1000.$
	50	2260

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{2260}{50} = 45.2 \text{ கி.கி.}$$

விதியில் மாற்றம்

எங்கெல்லாம் பிரிவுகளிலுள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை 'எண்ணிக்கை' என்றே குறிப்பிடப்படுகிறதோ அங்கெல்லாம் சராசரிக்கான விதியில் முதலில் எண்ணிக்கையையும் பின்னர் விலை மதிப்பையும் எழுதுவது உண்டு. இதர இடங்களில் எல்லாம் எண்ணிக்கை அலைவெண் என்றே குறிப்பிடப்படும்.

$$\frac{\Sigma n_1 x_1}{n_1}$$

அலைவெண் என்று குறிப்பிடப்படும் இடங்களில் எல்லாம் விலை மதிப்பை முதலிலும் அலைவெண்ணை இரண்டாவ தாகவும் குறிப்பிட வேண்டும்.

$$\frac{\Sigma x_1 \ f_i}{\Sigma f_i}$$

இரண்டு விதிமுறைகளில் வேறுபாடு இல்லை.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma n_i x_i}{\Sigma n_i}$$

எங்கெல்லாம் சராசரி என்று குறிப்பிடப்படுகிறதோ அது கூட்டுச் சராசரியை குறிப்பதாகும். இடத்தைப்

பொறுத்து இவை எளிய சராசரியாகவும் கூட்டுச் சராசரியாகவும் இருக்கலாம்.

நடுவன் அல்லது இடைநிலை அளவு (Median)

புள்ளியியலில் சராசரிக்கு அடுத்தபடியாக நடுவன் முக்கியத்துவம் உடையதாகும். நடுவன் என்பதே மையம் என்பதாகும். எனவே, நடுவன் என்பது, நடுவன் அளவைவிடக் குறைந்த மதிப்புடையவர்களின் எண்ணிக்கையும் மற்றும் நடுவன் அளவைவிடக் கூடுதல் மதிப்புடையவர்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாகயிருக்கும் விதத்தில் பரவலை இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கும் என்று விளக்கம் கொடுக்கலாம். எனவே, நடுவன் என்பது திரிபுகளின் இடத்தைப் பொறுத்துக் கணிக்கப்படுவதேயல்லாது திரிபுகளின் மதிப்பின் அடிப்படையில் கணிக்கப்படுவதில்லை என்பதை உணர வேண்டும். எனவே, நடுவன் அளவைக் கணிப்பதற்குப் பரவலில் உள்ள நபர்களை அவர்களின் மதிப்பின் அடிப்படையில் ஏறு வரிசையாக இடமாற்றி அமைப்பது மிக அவசியம். வேறுவிதமாகக் கூறினால், நபர்களை அலைவெண் பரவலாக மாற்ற வேண்டும். ஆனால் இத்தகைய அமைப்புச் சராசரியைக் கணிக்கும் போது தேவையில்லை. ஏனெனில் சராசரி, நபர்கள் எந்த இடத்திலிருந்த போதிலும் அவர்களின் மதிப்பை எல்லாம் கூட்டியே கணிக்கப்படுகிறது.

நடுவனின் குணங்கள்

1. நடுவன் பரவலை இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும். எனவே, இரு பாகங்களிலும் உள்ள நபர்கள் எண்ணிக்கை சமமாகும்.

2. ஒரு பாகத்தில் உள்ள நபர்களின் மதிப்பு ஒவ்வொன்றும் நடுவன் அளவைவிடக் கூடுதலாகயிருக்கும். இது போன்று அடுத்த பாகத்தில் உள்ள எல்லா நபர்களின் மதிப்பும் நடுவன் அளவை விடக் குறைவாக இருக்கும்.

எனவே நடுவனை ஓர் இடச் சராசரி அல்லது மையச் சராசரி எனக் குறிப்பிடலாம். சராசரியைப் போன்று நடுவன் அளவையும் தொகுக்கா விவரங்களுக்கும் பகுத்துச் செப்பனிட்ட விவரங்களுக்கும் கணிக்கலாம்.

தொகுக்கா விவரங்களுக்கான கணிப்பு

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கள் ஏழு நபர்களின் எடையைக் குறிப்பதாகக் கருதுவோம்.

45, 39, 48, 42, 50, 34, 37 (கி.கி.)

நடுவனைக் கணிப்பதற்கு இவ்விவரங்களை ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ மாற்றி அமைக்க வேண்டும். கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றியமைப்போம்.

34, 37, 39, 42, 45, 48, 50

இங்கு 7 விவரங்கள் இருப்பதால் 4வது விவரம் நடுவனாகும். எனவே நான்காவதாயிருக்கும் 42 கிலோ கிராம் நடுவனாகும்.

மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை இரட்டை எண் கொண்ட வேறு ஒரு பரவலைக் காண்போம்.

45, 35, 30, 41, 47, 38, 48, 52 இவற்றை ஏறு வரிசையில் மாற்றியமைப்போம்.

30, 38, 41, 45, 47, 48, 52

இங்கு 8 விவரங்கள் இருப்பதால் எதையும் மைய விவரம் எனக் கூறமுடியாது. எனவே, 4வது இடத்திலும் 5வது இடத்திலும் உள்ள விவரங்கள் மைய நிலையைக் குறிப்பதாகும். எனவே 41, மற்றும் 45 என்ற இரு மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள 42, 43 அல்லது 44 நடுவனளவாகயிருக்கலாம். என்றாலும், 41, 45 என்ற இரு மதிப்புகளின் மைய அளவையே நடுவனளவாக எடுப்பதுண்டு.

$$\text{நடுவன்}\ \frac{41 + 45}{2} = \frac{86}{2} = 43.$$

நடுவன் அளவும் பரவலில் உள்ள விவரங்கள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்படுகிறதோ அதே அளவையில்தான் கொடுக்கப்படும்.

பொது வாய்ப்பாடு

மொத்தம் 'n' விவரங்கள் இருந்தால் $(n+1)/2$ வது விவரம் நடுவனாகும். மொத்தம் 8 நபர்களிருந்தால் $\frac{8+1}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ நபரின் மதிப்பு நடுவனளவாகும். 4, மற்றும் 5 என்ற இரு நபர்களின் சராசரி நடுவனவாகும் என்று கூறலாம்.

தொடர்பில்லாப் பரவலின் நடுவன்

ஒரு பிரிவில் உள்ள மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் பரவலைக் கவனிப்போம்.

மதிப்பெண்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
47	5
51	2
55	4
59	2
61	1
மொத்தம்	14

பரவல் காரணமாக மேலே கொடுத்துள்ள 5 மதிப்புகளையும் கீழ் கண்டவாறு எழுதலாம். பரவலில் உள்ள மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை 14. ஆனால் 47 என்ற மதிப்பு 5 தடவை மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது என்பது அதன் அலைவெண்ணிலிருந்து தெரிகிறது. இது போன்று இதர மதிப்புகளும் அவைகளின் அலைவெண்ணிற்கு ஏற்றாற்போல் மீண்டும் மீண்டும் வர வேண்டும்.

வரிசை எண்	மதிப்பு	ஒவ்வொரு கடைசி மதிப்பின் வரிசை எண்
1	47	
2	47	
3	47	
4	47	
5	47 →	5
6	51	
7	51 →	7
8	55	
9	55	
10	55	
11	55 →	11
12	59	
13	59 →	13
14	61 →	14

$$\therefore \text{ நடுவன் நபர் } = \frac{14+1}{2} = 7{\cdot}5 \text{ நபராகும்.}$$

∴ 7.5வது நபரின் மதிப்பு நடுவனவளவாகும். 7வது நபருக்குப்பின் 8வது நபரிலிருந்து 11வது நபர் வரையில் உள்ளவர்கள் ஒவ்வொருவரின் மதிப்பும் 55. எனவே நடுவன் 55.

இம்முறையில் நாம் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் பலமுறை எழுதி வரிசை எண்கள் கொடுக்க வேண்டிய சிரமம் உள்ளது. ஆனால் நடுவன் அளவைக், கூட்டு அலைவெண்ணிலிருந்து கணிக்கலாம். கூட்டு அலைவெண்ணிலிருந்து கீழ் கண்டவாறு கணிக்கலாம்.

மதிப்பெண் x	அலைவெண் f	கூட்டு அலைவெண் அல்லது திரள் அலைவெண் cf
47	5	5
51	2	7
55	4	11
59	2	13
61	1	14

மேல் அட்டவணையிலிருந்து, 7வது நபருக்குப் பின்னால் 11வது நபர் வரையிலும் உள்ளவர்களின் மதிப்பு 55 என்று தெரிகிறது. முன்னர் உள்ள அட்டவணையில் அம்புக் குறிகளால் வலது பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வரிசை எண்கள் யாவும் கூட்டு அலைவெண் அல்லது திரள் அலைவெண் அளவு ஆகும். இதே நிலைமை எல்லா இடத்திற்கும் பொருந்தும். ஆகையால் பின்னர் கூறிய கூட்டு அலைவெண்களிலிருந்து நடுவன் அளவைக் கணிப்பதை நல்ல முறையாகக் கருதலாம்.

தொடர்புடைப் பரவலின் நடுவன் அளவு

தொடர்புடைப் பரவலின் நடுவன் அளவு கணிப்பு முறை முன்னர் கூறிய முறையிலிருந்து மாறுபட்டது. முன்னுள்ள முறையில் கூட்டு அலைவெண்ணை மட்டும் கவனித்தோம். ஆனால் தொடர்புடைப் பரவலுக்குக் கூட்டு அலைவெண்ணோடு

பிரிவுகளின் எல்லைகளையும் கவனிக்க வேண்டும். எனவே கூட்டு அலைவெண், பிரிவுகளின் எல்லைகள், நடுவன் பிரிவின் அலைவெண், நடுவன் பிரிவின் இடைவெளி எல்லாம் ஒன்று சேர கவனிக்கப்படுகின்றன.

செயல் முறை

1. உண்மையான பிரிவு இடைவெளியும், பிரிவு எல்லைகளும் தேவை. கொடுக்கப்பட்டுள்ள பிரிவு இடைவெளிகள் உண்மையானவையா என்று அறிய வேண்டும். உண்மையான இடைவெளியாக இல்லாதிருந்தால் பிரிவுகளின் கீழ், மேல் எல்லைகளைப் பொருத்தமாகத் திருத்தி உண்மையான இடைவெளியாக மாற்ற வேண்டும்.
2. பரவலின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் கணித்து 'N' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.
3. பரவலின் மொத்த எண்ணிக்கையை இரண்டு கொண்டு வகுக்க வேண்டும். $\frac{N}{2}$
4. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் குறைந்த நிலை கூட்டு அலைவெண்களைக் கணிக்க வேண்டும். $(c.f.)$
5. கூட்டு அலைவெண்களிலிருந்து நடுவன் அளவு அல்லது $\frac{N}{2}$க்குச் சமமான நபர் எந்தப் பிரிவில் அமைகிறார் என்று நடுவன் பிரிவையும் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும்.
6. நடுவன் பிரிவின் கீழ் எல்லையை 'l' என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடவும்.
7. நடுவன் பிரிவின் அலைவெண்ணைக் கணித்து அதை 'f' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.
8. நடுவன் பிரிவின் பிரிவு இடைவெளியை 'c' என்ற எழுத்தால் குறிப்பிட வேண்டும்.
9. நடுவன் பிரிவிற்கு முன் உள்ள பிரிவின் குறைந்த நிலை கூட்டு அலைவெண்ணைக் கணித்து 'm' என்று குறிப்பிட வேண்டும்.
10. கீழே கொடுத்துள்ள விதி முறையைப் பயன்படுத்தி நடுவன் அளவைக் கணிக்கவும்

$$\text{நடுவன்} = l + \frac{(N/2 - m)\,c}{f}$$

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் நடுவன் கணிப்பு

அலைவெண் பரவலில் இருந்தும் நடுவன் அளவை எளிதில் கணிக்கலாம். முன்னர் கவனித்த அதே 50 மூட்டைகளின் எடையை இங்கு கவனிப்போம். அலைவெண்ணின் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் பரவலின் பாதி நபர்களை எண்ணிக் கணக்கிடுகிறோம். இதற்கு அலைவெண்ணையும் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணையும் கருதுவோம்.

பிரிவு (1)	அலைவெண் (2)	குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் (3)
60.5 – 70.5	1	1
70.5 – 80.5	5	6
80.5 – 90.5	9	15
90.5 – 100.5	14	29
100.5 – 110.5	15	44
110.5 – 120.5	4	48
120.5 – 130.5	2	50
மொத்தம்	50	

மொத்த நபர்கள் = 50

$$\therefore N/2 = \frac{50}{2} = 25$$

மேலுள்ள அட்டவணையில் மூன்றாவது நிரை வரிசையிலிருந்து, 15 மூட்டைகள் (80.5 – 90.5) என்ற பிரிவு வரையிலும் உள்ளன என்று தெரிகிறது. எனவே, 15 மூட்டைகளின் எடை ஒவ்வொன்றும் 90.5 கி.கி.யை விடக் குறைவானது எனத் தெரிகிறது. பரவலின் பாதி அளவான 25 மூட்டைகளுக்கு இன்னும் 10 மூட்டைகள் தேவைப்படுகின்றன. (25 – 15 = 10). தேவைப்படும் 10 மூட்டைகளும் 90.5 – 100.5 என்ற பிரிவிலிருந்துதான் எடுக்கப்பட வேண்டியுள்ளன. எனவே 90.5ல் 100.5 என்ற பிரிவு நடுவன் பிரிவு (median class) என்று அழைக்கப்படும். நடுவன் பிரிவின் அலைவெண் 14 மூட்டைகள். அதன் இடைவெளி 10 கி.கி. எனவே, நடுவெண் பிரிவிலுள்ள 14 மூட்டைகளும் 10 கி.கி. இடைவெளி தூரத்தில் சமமாக வைக்கப்பட்டுள்ளன என்று தெரிகிறது. எனவே இப்பிரிவில் உள்ள ஒவ்வொரு

முட்டையும் $\frac{10}{14}$ கி.கி. இடைவெளி தூரத்தில் அமைந்துள்ளது என்று தெரிகிறது. நமக்குப் பரவலின் பாதி அளவுக்குத் தேவைப்படும் 10 முட்டைகளும் $\frac{10 \times 10}{14}$ கி.கி. இடைவெளி தூரத்தைக் கொண்டதாக இருக்கும்.

$$\frac{10 \times 10}{14} = \frac{100}{14} = 7 \cdot 1 \text{ கி.கி.}$$

நடுவன் பிரிவில் கீழ் எல்லை 90.5 கி.கி. லிருந்து ஆரம்பிப்பதால் 25 வது முட்டை 90.5 + 7.1 = 97.6 கி.கி. என்ற நிலையைக் கொண்டதாக இருக்கும். விதியைப் பயன்படுத்தி நடுவன் அளவைக் கவனிப்போம்.

$$
\begin{aligned}
\text{நடுவன்} &= M \\
N &= 50 \\
N/2 &= 25 \\
m &= 15 \\
f &= 14 \\
c &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore M &= l + \frac{(N/2 - m)\, c}{f} \\
&= 90 \cdot 5 + \frac{(50/2 - 15) \times 10}{14} \\
&= 90 \cdot 5 + \frac{(25 - 15) \times 10}{14} \\
&= 90 \cdot 5 + \frac{10 \times 10}{14} \\
&= 90.5 + 7.1 = 97.6 \text{ கி.கி.}
\end{aligned}
$$

மாதிரி 2

கீழ் உள்ள விவரங்களிலிருந்து நடுவன் கணிப்போம்.

இரு வாரக் கூலி ரூ.	நபர்களின் எண்ணிக்கை	கூட்டு அலைவெண்
21 – 30	2	2
31 – 40	5	7
41 – 50	12	19
51 – 60	9	28
61 – 70	4	32
71 – 80	2	34

முன்னர் உள்ள மாதிரிக்கும் இந்த மாதிரிக்கும் வேறுபாடு உண்டு. முதல் மாதிரியில் பிரிவு இடைவெளிகள் உண்மையானவை. ஆனால் இந்த மாதிரியில் அவ்வாறில்லை. எனவே, இதில் கீழ் கண்டவாறு பிரிவு இடைவெளிகளை உண்மையான பிரிவு இடைவெளிகளாக மாற்ற வேண்டும்.

இரு வாரக் கூலி ரூ.	நபர்களின் எண்ணிக்கை	கூட்டு அலைவெண்
20.5 – 30.5	2	2
30.5 – 40.5	5	7
40.5 – 50.5	12	19
50.5 – 60.5	9	28
60.5 – 70.5	4	32
70.5 – 80.5	2	34
	34	

$N = 34 \qquad \frac{N}{2} = \frac{34}{2}\ 17.$

$m = 7.$

நடுவன் பிரிவு $= 40.5 - 50.5$

$C = 50.5 - 40.5 = 10$

$l = 40.5$

$f = 12$

$$M = l + \frac{(N/2 - m) \times c}{f}$$

$$= 40.5 + \frac{(17 - 7)}{12} \times 10$$

$$= 40.5 + \frac{10}{12} \times 10$$

$$= 40.5 + \frac{100}{12}$$

$$= 40.5 + 8.3$$

= ரூ. 48.8.

மாதிரி 3

நடுவளளவு	அலைவெண்
15	7
25	6
35	9
45	4
55	5
65	4
75	7
85	4
	46

இவ்வெடுத்துக்காட்டில் பிரிவு எல்லைகளுக்குப் பதிலாக பிரிவுகளின் மைய அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, பிரிவுகளின் எல்லைகள் இம் மைய அளவிலிருந்து கணிக்கப்பட வேண்டும். பிரிவுகளின் எல்லைகளை உறுதிப்படுத்த பிரிவு இடைவெளி அளவு தேவைப்படுகிறது. இரு பிரிவுகளின் மைய அளவுகளின் வேறுபாடே பிரிவு இடைவெளி என்பது தெரியும். இங்கு இரு பிரிவுகளின் மைய அளவுகளின் வேறுபாடு 10 என்று இருப்பதால் அந்த 10ஐப் பிரிவு இடைவெளியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். எனவே பிரிவு இடைவெளி தூரத்தின் ஒரு பாதியை மைய அளவிலிருந்து கழித்தும் ஒரு பாதியை மைய அளவோடு கூட்டியும் முறையே வகுப்புகளின் கீழ், மேல் எல்லை களைக் கணிக்கலாம். கீழ் கண்டவாறு பிரிவுகளின் உண்மை யான இடைவெளி தூரத்தைக் கணித்து அட்டவணையை மாற்றி யமைக்கலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	கூட்டு அலைவெண்
10 – 20	7	7
20 – 30	6	13
30 – 40	9	22
40 – 50	4	26
50 – 60	5	31
60 – 70	4	35
70 – 80	7	42
80 – 90	4	46
	46	

$N = 46.\ \frac{N}{2} = 23;$

$m = 22.$

∴ நடுவன் பிரிவு = 40 – 50

$l = 40$

$c = 10$

$f = 4.$

$$M = l + \frac{(N/2 - m) \times c}{f}$$

$$= 40 + \frac{(23 - 22)\ 10}{4}$$

$$= 40 + 2.5 = 42.5$$

மாதிரி 4

கூட்டு அலைவெண்ணிலிருந்து நடுவன் அளவு கணித்தல்

கீழே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

மதிப்பிற்கும் குறைவான	கூட்டு அலைவெண்
10	3
20	5
30	8
40	12
50	20
60	25

முன்னர் கொடுத்துள்ள எடுத்துக் காட்டைவிட இது சிறிது வேறுபட்டது. இங்கு பிரிவுகளின் மேல் எல்லைகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. எனவே ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் கீழ் எல்லைகளைக் கண்டு பிடித்துப் பிரிவுகளை உறுதிப்படுத்த வேண்டும். கூட்டு அலைவெண் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் அடுத்தடுத்து உள்ள கூட்டு அலைவெண்களின் வேறுபாட்டைக் கணித்துப் பிரிவுகளின்

அலைவெண் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். அட்டவணையைப் பின்னர் கீழ் கண்டவாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

பிரிவு	கூட்டுஅலைவெண்	அலைவெண்
0 – 10	3	3 – 0 = 3
10 – 20	5	5 – 3 = 2
20 – 30	8	8 – 5 = 3
30 – 40	12	12 – 8 = 4
40 – 50	20	20 – 12 = 8
50 – 60	25	25 – 20 = 5
		25

பின்னர் நடுவன் அளவை முன்போல் கணிக்கலாம்.

$N = 25 \quad \frac{N}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$

நடுவன் பிரிவு = 40 – 50.

$l = 40$

$m = 12$

$f = 8$

$c = 10$

$$M = l + \frac{(N/2 - m) \times c}{f} = 40 + \frac{(25/2 - 12) \times 10}{8}$$

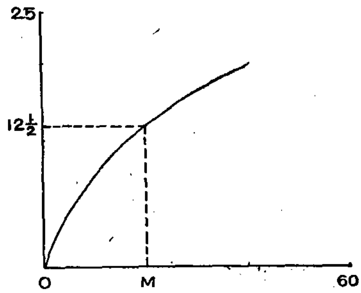
$$= 40 + \tfrac{1}{2} \times \frac{10}{8} = 40\frac{5}{8}$$

$$= 40.6$$

வரைபடத்திலிருந்து நடுவன் கணிப்பு முறை

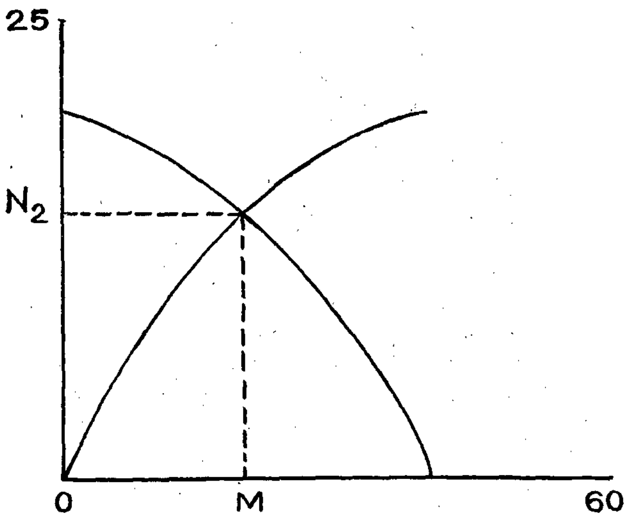
வரைபடத்திலிருந்தும் நடுவன் அளவைக் கணிக்கலாம். குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் தேவைப்படுவதால் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் வரைபடத்திலிருந்தும், நடுவன் அளவைக் கணிக்கலாம். வரைபடத்தில் கூட்டு அலைவெண் அளவுகள் Y அச்சில் குறிக்கப்படும். நடுவன் அளவு, பரவலின் நடுப்பகுதியான $N/2$ஐக் குறிப்பதாகும். Y அச்சில் $N/2$ வுக்குப்

பொருத்தமான இடத்தைக் குறிப்பிடலாம். பின்னர், Y அச்சில் இந்த இடத்திலிருந்து X அச்சுக்கு இணை கோடு ஒன்று வரைந்து உச்சிக்கோட்டை வெட்டும் படி செய்யலாம். பின்னர் உச்சிக்கோட்டின் இந்த வெட்டுமிடத்திலிருந்து Y அச்



படம் 12
நடுவன்

சிற்கு இணையாகவும் X அச்சிற்குச் செங்குத்தாகவும் ஒரு கோடு வரைந்து X அச்சை வெட்டும்படி செய்யலாம். X அச்சு வெட்டுகின்ற இடத்தின் அளவே நடுவன் அளவாக இருக்கும்.



படம் 13
நடுவன்

குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணின் வரைபடத்தை யோ, அல்லது கூடுதல் நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணின் வரை படத்தையோ பயன்படுத்தலாம். இவ்விரண்டு இடங்களிலும் செயல் முறை ஒன்றே. என்றாலும், இவ்விரு வரைகோடுகளை யும் ஒரே சமயத்தில் பயன் படுத்தலாம். இவ்விரு கோடுகளும் சந்திக்குமிடத்திலிருந்து X அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்து, X அச்சை வெட்டும்படி செய்யலாம். X அச்சில் வெட்டப்படும் இடத்தின் அளவே நடுவன் அளவாகும். இவ்விரு கோடுகளில் நாம் எதைப்பயன்படுத்திய போதிலும், $N/2$ என்ற அளவு ஒன்றேதான். எனவே, Y அச்சில் $N/2$ என்ற அளவிற் கேற்ற இடத்திலிருந்து X அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு உச்சிக்கோடுகளை ஒரே இடத்தில்தான் வெட்டும்.

நடுவன் அளவின் குணங்கள்

1. நடுவன் அளவின் முக்கிய குணம் என்னவென்றால், வரிசையில் உறுப்புகளின் இருக்குமிடத்தைப் பொறுத்து நடுவனளவின் மதிப்புப் பாதிக்கப்படும். மாறாக, உறுப்புக்களின் மதிப்பைப் பொறுத்தோ அல்லது உருவைப் பொறுத்தோ நடுவன் அளவு மதிப்பு மாறுவதில்லை.

2. பரவலில் உள்ள உறுப்புக்களின் அளவுகள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்படுகிறதோ அதே அளவை யில்தான் நடுவனளவும் கொடுக்கப்படும்.

காலம அளவுகள் (Quartiles) காலமம்

நடுவன் அளவு, பரவலை இரு சமபாகமாகப் பகுக்கும் என்று கண்டோம். நடுவனளவைப் போன்று வேறு பல அளவுகளும் பரவலைப் பல பாகங்களாக வகுக்கும் வேறுபல அளவுகளும் உண்டு. நாம் பரவலை நான்கு சம பாகங்களாகவோ அல்லது 5 சம பாகங்களாகவோ அல்லது 10 சம பாகங்களாகவோ அல்லது 100 சம பாகங்களாகவோ பகுக்கலாம். ஒவ்வொரு வகையான பகுப்பு முறைக்கும் ஒவ்வொரு விதமான அளவுகள் உண்டு. அவைகளும் மைய நோக்கு அளவுகள் என்றே அழைக் கப்படும். காலம அளவுகள் என்பது பரவலை நான்கு பாகங் களாகப் பிரிக்கும் ஒரு வித மைய நோக்கு அளவுகளே. ஒரு பரவலை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும் என்றால் 3 இட நிலைகள் வேண்டும். இம் மூன்று நிலைகளும் காலமம் என்று கருதப்படும். மற்றும் மூன்று பகுப்பு நிலைகள் இருப்பதால் அவ்வளவுகளின் வரிசைக் கிரமத்தைப் பொறுத்தோ அல்லது அமைப்பின் வரிசையைப் பொறுத்தோ முதல் காலம

அளவு (Q_1) இரண்டாவது கால்ம அளவு (Q_2) மற்றும் மூன்றாம் கால்ம அளவு (Q_3) என்று அழைக்கப்படும்.

A ——— Q_1 ——— Q_2 ——— Q_3 ——— B

முதல் கால்ம அளவு அல்லது கால்மம் (First Quartile)

முதல் கால்ம அளவு பரவலை இரு சமமில்லாப் பகுதிகளாக பகுக்கும். பரவலில் உள்ள கால் பங்கு நபர்களின் மதிப்பு ஒவ்வொன்றும் முதல் கால்ம அளவை விடக் குறைவாகவும், மீதி யுள்ள 3/4 பங்கு நபர்களின் மதிப்பு ஒவ்வொன்றும் முதல் கால்ம அளவு மதிப்பை விடக் கூடுதலாகவும் இருக்கும்.

1. தொகுக்கப்படா விவரத்திலிருந்து கீழ் கால்ம அளவு கணிப்பு

1. கொடுத்துள்ள நபர்களின் விவரங்கள் முதலில் ஏறு வரிசையில் அமைக்கப்பட வேண்டும்.
2. மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கை 'n' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்பட வேண்டும்.

முதல் கால்ம அளவு (Q_1) $= \dfrac{n+1}{4}$ உறுப்பின் மதிப்பைக் குறிப்பதாகும்.

கீழே உள்ளவாறு 7 உறுப்புகளின் மதிப்பு கொடுக்கப் பட்டால்

40, 25, 35, 50, 60, 20, 75

அவைகள் கீழ் கண்டவாறு மாற்றி அமைக்கப்பட வேண்டும்.

20, 25, 35, 40, 50, 60, 75

$n = 7;\ n+1 = 7+1 = 8$

$$\frac{n+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

இரண்டாவது உறுப்பின் அளவு Q_1 ஐக் குறிப்பதாகும். எனவே இரண்டாவது உறுப்பின் மதிப்பான 25 'Q_1' ஆகும்.

($n+1$) சரியாக 4 கொண்டு மீதியில்லாமல் வகுக்கப் படவில்லையானால் கீழ் கண்ட முறையைப் பின்பற்றலாம்.

ஓர் எடுத்துக்காட்டில் 10 நபர்கள் இருப்பதாகக் கருது வோம். 20, 25, 35, 40, 60, 70, 72, 79, 80, 85

$n = 10: n+1 = 11$

$$\frac{n+1}{4} = \frac{11}{4} = 2.75$$

ஆகவே கால்ம அளவு இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது நபர்களின் மதிப்புகளுக்கிடையில் இருக்கும். இரண்டாவது நபரின் மதிப்பு 25. மூன்றாவது நபரின் மதிப்பு 35. இரண் டிற்கும் உள்ள வேறுபாடு $35 - 25 = 10$. இவ்வேறுபாட்டின் முக்கால் பகுதி $= 10 \times 3/4 = \frac{30}{4} = 7.5$.

∴ Q_1 = இரண்டாவது நபர் மதிப்பு + இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது நபர்களின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் 3/4 பகுதி

அதாவது $25 + 7.5 = 32.5$

வரிசையில் 8 உறுப்புகள் இருந்தால் $\frac{8+1}{4} = 2.25.$ $(2\frac{1}{4})$ என்ற உறுப்பின் மதிப்பு இதன் கால்ம அளவாகும். வேறு விதமாகக் கூறினால் இது இரண்டாவது உறுப்பின் மதிப்பிற்கும், இரண்டு மற்றும் 3வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டில் கால்ம பங்கிற்கும் சமமாக இருக்கும்.

மாறாக, வரிசையில் 9 உறுப்புகள் இருந்தால் இவ் வளவு $\frac{9+1}{4} = 2.5$. எனவே இது 2வது உறுப்பின் மதிப்பிற்கும், 2 மற்றும் 3 என்ற உறுப்புகளின் வேறுபாட்டின் மதிப்பின் அரைப் பகுதியும் சேர்ந்த மதிப்பிற்கும் சமமாகும்.

2. தொடர்பில்லாப் பரவலில் கீழ் கால்ம அளவு கணிப்பு

கீழே உள்ள செயல் முறைகளைக் கையாளலாம்.

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவல் குறைந்த நிலை திரள் (கூட்டு) அலைவெண் பரவலாக மாற்றப் பட வேண்டும்.

(2) பரவலின் மொத்த அலைவெண் எண்ணிக்கை 'n' என்ற அளவால் குறிக்கப்பட வேண்டும்.

$\frac{(N+1)}{4}$ என்ற நபரின் மதிப்புக் கண்டு பிடிக்கப்பட்டால் அதுவே கீழ் நிலைக் கால்ம அளவாகும்.

உறுப்பின் மதிப்பு	அலைவெண்	குறைந்த நிலைத் திரள் அலைவெண்
25	3	3
35	4	7
45	2	9
55	5	14
	14	

$N = 14, \quad N+1 = 15$

$\therefore \; Q_1 = \frac{15}{4} = 3.75$ உறுப்பின் மதிப்பாகும்.

ஆனால் மூன்றாவது உறுப்பிற்குப் பின்னர் 4 முதல் 7 உறுப்புகள் வரை உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பின் மதிப்பும் 35 ஆகும்.

$\therefore \; 3\frac{3}{4}$ வது உறுப்பின் மதிப்பு 35 ஆகும்.

3. தொடர்புடைப் பரவலிலிருந்து முதற்கான்ம அளவு கணிப்பு

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அலைவெண்கள் முதலில் குறைந்த நிலைத்திரள் (கூட்டு) அலைவெண்களாக மாற்றப்பட வேண்டும்.
2. எல்லா அலைவெண்களின் கூட்டுத் தொகை கணிக்கப்பட்டு '*N*' என்று குறிக்கப்பட வேண்டும். பின்னர் 4 கொண்டு வகுக்கப்பட்டுப் பரவலில் எண்ணிக்கையின் கால்மப் பகுதியைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.
3. முதற்கால்ம அளவு அமையும் முதற்கான்மனளவுப் பிரிவு கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.
4. கீழ் கால்மப் பிரிவின் உண்மையான கீழ் எல்லையைக் கணக்கிட வேண்டும்.
5. கீழ் கால்மப் பிரிவின் வகுப்பின் அலைவெண் (*f*) குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

6. கீழ் கால்மப் பிரிவின் முன்னுள்ள பிரிவின் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் கணக்கிடப்பட வேண்டும் (m)

7. கீழ் கால்மப் பிரிவு (அல்லது) முதற் கால்மப் பிரிவின் இடைவெளியைக் குறிக்க வேண்டும். (c).

Q_1 = கீழ் கால்ம அளவு

l = கீழ் கால்மப் பிரிவு கீழ் எல்லை

f = கீழ் கால்மப் பிரிவின் அலைவெண்

m = கீழ் கால்மப் பிரிவின் முன் பிரிவின் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்.

c = கீழ் கால்மப் பிரிவின் இடைவெளி

கீழேயுள்ள வாய்ப்பாட்டைக் கீழ் கால் அளவு கணிப்பதற்குப் பயன்படுத்தலாம்.

$$Q_1 = l + \frac{(N/4 - m)\,c}{f}$$

பிரிவு	அலைவெண்	கூட்டு அலைவெண்
0 – 5	3	3
5 – 10	4	7
10 – 15	2	9
15 – 20	5	14
20 – 25	1	15

$$N = 15 \quad \frac{N}{4} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

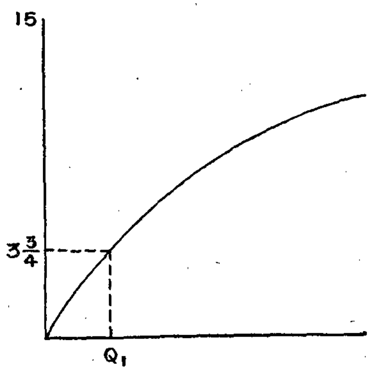
முதற் கால்ம அளவு பிரிவு 5—10 வரை

$l = 5$
$f = 4$
$m = 3$
$c = 5$

$$Q_1 = 5 + \frac{(15/4 - 3) \times 5}{4}$$
$$= 5 + \frac{0.75 \times 5}{4}$$
$$= 5.94.$$

4. வரை படத்திலிருந்து கணிக்கும் முறை

நடுவன் அளவு கணித்தது போன்று, கால்ம அளவுகளையும் உச்சிக் கோட்டினின்றும் கணிக்கலாம். குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலை வெண்ணுக்கான உச்சிக்கோடு வரைய வேண்டும். உறுப்புகளின் மதிப்புகள் X அச்சிலும், கூட்டு அலைவெண்கள் Y அச்சிலுமாகக் குறிக்கப்பட வேண்டும். முதற் கால்ம அளவான Q_1, பரவலை 1:3 என்ற விகிதத்தில் பகுப்பதால் நாம் Y அச்சில் $N/4$க்கு சமமான இடநிலையைக் குறிப்பிட வேண்டும். பிறகு, இந்த இடநிலையில் இருந்து X அச்சிற்கு இணையாக ஒரு



படம் 14
முதல் கால்ம அளவு

கோடு வரைந்து உச்சிக்கோட்டை வெட்டும்படி செய்ய வேண்டும். பின்னர் உச்சிக்கோடு வெட்டப்படும் இடத்திலிருந்து X அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் Y அச்சிற்கு இணையாகவும் ஒரு கோடு வரைந்து X அச்சை வெட்டும்படி செய்ய

வேண்டும். X அச்சு வெட்டப்படும் இடத்திற்கான மதிப்பே முதல் கால்ம அளவு ஆகும்.

குணங்கள்

1. முதல் கால்ம அளவு, பரவலில் உள்ள உறுப்புகளின் மதிப்புகள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்படுகின்றனவோ அதே அளவையில் கொடுக்கப்படவேண்டும்.
2. முதல் கால்ம அளவு பரவலின் உறுப்புகளின் இட நிலைகளைப் பொறுத்து மாறுமேயல்லாது, உறுப்புகளின் மதிப்பினாலோ அல்லது உருவினாலோ மாறுபடா.

மூன்றாம் கால்ம அளவு (Q3) — மேல் கால்ம அளவு (Upper Quartile)

மேல் கால்ம அளவு பரவலின் உறுப்புகளை 3:1 என்ற விகிதத்தில் இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கும். இதில் 1/4 பங்கு உறுப்புகளின் மதிப்பு ஒவ்வொன்றும் மூன்றாம் கால்ம அளவை விடக் கூடுதலாகவும் 3/4 பங்கு உறுப்புகளின் மதிப்பு ஒவ்வொன்றும் மூன்றாம் கால்ம அளவைவிடக் குறைவாகவும் இருக்கும். இது முதல் கால்ம அளவிற்கு நேர் எதிரானது. முதல் கால்ம அளவைக் கணித்தது போன்று இதையும் கணிக்கலாம்.

1. தொகுக்கப்படா விவரத்தின் மூன்றாம் கால்ம அளவு கணிப்பு

கீழே உள்ள முறைகள் பின்பற்றப்படவேண்டும்.

1. கொடுத்துள்ள உறுப்புகளின் மதிப்புகள் ஏறுவரிசையில் மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டும்.
2. நபர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை கணிக்கப்பட்டு 'n' என்று குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.
3. கீழேயுள்ள வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$Q_3 = \frac{(n+1)\,3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\,(n+1) \text{ உறுப்பின் மதிப்பாகும்.}$$

கீழே உள்ள விவரங்களுக்கு மேல் கால்ம அளவு கணிப்போம்.

29, 35, 26, 44, 40, 55.

இவ்விவரங்களை ஏறுவரிசையில் அமைப்போம்.

26, 29, 35, 40, 44, 55.

மொத்த உறுப்புகள் $= n = 6$.

$Q_3 = \frac{3}{4}$ $(n+1)$ நபரின் மதிப்பாகும்.

$$= \frac{3}{4}(6+1) = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4} = 5.25.$$

எனவே $5\frac{1}{4}$ நபரின் மதிப்பு கணிக்கப்பட வேண்டும்.

$Q_3 =$ 5வது நபரின் மதிப்பு $+\frac{1}{4}$ (6வது நபரின் மதிப்பு — 5வது நபரின் மதிப்பு)

6வது நபரின் மதிப்பு = 55.

5 வது நபரின் மதிப்பு = 44.

6 மற்றும் 5வது நபர்களின் வேறுபாடு $= 55 - 44 = 11$

$\frac{1}{4}$ பாக வேறுபாடு $= \frac{11}{4} = 2.75.$

$\therefore Q_3 = 44 + 2.75 = 46.75$

1. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு மேல் நிலை அளவு கணிக்கவும்

29, 35, 26, 40, 58, 44, 55

முதலில் இவற்றை ஏறுவரிசையில் மாற்றியமைக்கவும்

26, 29, 35, 40, 44, 55, 58

$n = 7$

$Q_3 = \frac{3}{4} \times (n+1)$ நபரின் மதிப்பு

அதாவது $\frac{3}{4} \times 8 = \frac{24}{4} = 6$ வது நபரின் மதிப்பு

$\therefore$ 6வது நபரின் மதிப்பு = 55

$Q_3 = 55$

2. தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவலின் மேல் நிலைக் கால்ம அளவு கணிப்பு

1. முதலில் கொடுத்துள்ள அலைவெண்ணைக் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணாக மாற்ற வேண்டும்.
2. உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 'N' என்று குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.
3. முன்னர் கூறிய அதே வாய்ப்பாட்டையே $\frac{3(N+1)}{4}$ பயன்படுத்தலாம்.

கீழேயுள்ள பரவலுக்கான மூன்றாம் கால்ம அளவு கணிக்கலாம்.

மதிப்பு	அலைவெண்
25	3
35	4
45	2
55	5
	14

முதலில் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் கீழ் கண்டவாறு கணிக்கப்பட வேண்டும்.

மதிப்பு (1)	அலைவெண் (2)	கூட்டு அலைவெண் (3)
25	3	3
35	4	7
45	2	9
55	5	14

$N = 14,\quad \frac{3(N+1)}{4} = \frac{45}{4} = 11.25$

மேலேயுள்ள அட்டவணையில் 3வது நிரை வரிசையிலிருந்து 9வது நபருக்கு மேல் உள்ள எல்லா நபர்களின் மதிப்பே 55

என்று தெரிகிறது. $11\frac{1}{4}$ நபர் 9வது நபருக்கு மேலேயிருப்பதால் Q_3 யின் மதிப்பும் 55 ஆகும்.

3. தொடர்புடை அலைவெண் பரவலுக்கு மேல் கால்ம அளவு கணிப்பு

தொடர்புடை அலைவெண் பரவலுக்குரிய கணிப்பு முறை தொடர்பில்லாப் பரவலுக்கான முறையைவிட வேறுபட்டது என்றாலும் செயல் முறைகள் ஒன்றே. வாய்ப்பாடு $\frac{3}{4}(N+1)$ என்பதற்குப் பதிலாக $3N/4$ என்று மாறும்.

பின்பற்றப்படும் செயல் முறைகள்

1. அலைவெண்கள் யாவும் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்களாக மாற்றப்பட வேண்டும்.
2. மொத்த அலைவெண் கணிக்கப்பட்டு 'N' என்று குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.
3. பின்னர் 3 கொண்டு பெருக்கி 4 கொண்டு வகுக்கப்பட வேண்டும். அல்லது $3/4$ கொண்டு பெருக்கப்பட வேண்டும். $3N/4$.
4. மூன்றாம் கால்ம அளவு அமைந்துள்ள பிரிவைக் காண வேண்டும். இப்பிரிவு மூன்றாம் பிரிவு கால்மப் பிரிவு என்றோ அல்லது மேல் கால்மப் பிரிவு என்றோ கருதப்படும்.
5. மேல் கால்மப் பிரிவின் உண்மையான கீழ் எல்லைக் கணக்கிடப்பட வேண்டும். (l)
6. மேல் கால்மப் பிரிவின் அலைவெண்னணக் குறிக்க வேண்டும். (f)
7. மேல் கால்மப் பிரிவின் முன்னுள்ள பிரிவிற்கான குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் கணிக்கப்பட வேண்டும். (m)
8. மேல் கால்ம வகுப்பின் இடைவெளி தூரம் கணக்கிடப்பட வேண்டும். (c)

$$\text{மேல் கால்ம அளவு} = Q_3 = l + \frac{(3N/4 - m)\,c}{f}$$

Q_3 = மேல் கால்ம அளவு

l = மேல் கால்மப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

N = மொத்த அலைவெண்

m = மேல் கால்மப் பிரிவின் முன் பிரிவின் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்

c = மேல் கால்மப் பிரிவின் இடைவெளி

f = மேல் கால்மப் பிரிவின் அலைவெண்

கீழேயுள்ள பரவலுக்கான மேல் கால்ம அளவு கணிக்க

பிரிவு (1)	அலைவெண் (2)	குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் (3)
0 – 5	3	3
5 – 10	4	7
10 – 15	2	9
15 – 20	5	14
20 – 25	1	15
	15	

அலைவெண்ணின் மொத்தம் (N) = 15.

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 15}{4} = \frac{45}{4}$$

$$= 11.25 \quad (11\tfrac{1}{4})$$

11.25 வது உறுப்பின் மதிப்பு = Q_3

மூன்றாவது நிரை வரிசையிலிருந்து $11\frac{1}{4}$ உறுப்பு 15 முதல் 20 வரையுள்ள பிரிவில் உள்ளது என்றும், 15 – 20 என்ற பிரிவு மேல் கால்மப் பிரிவு என்றும் தெரிகிறது.

மேல் கால்மப் பிரிவு = 15 – 20

மேல் கால்மப் பிரிவின் உண்மையான கீழ் எல்லை $(l) = 15$.

மேல் கால்மப் பிரிவின் இடைவெளி = 20 – 15 = 5

மேல் கால்மப் பிரிவின் முன் பிரிவின்

குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் = 9

$$Q_3 = l + \frac{(3N/4 - m) \times c}{f}$$

$$= 15 + \frac{(45/4 - 9) \times 5}{5}$$

$$\therefore \quad = 15 + \frac{(11.25 - 9) \times 5}{5}$$

$$= 15 + \frac{2.25 \times 5}{5}$$

$$= 15 + 2.25$$

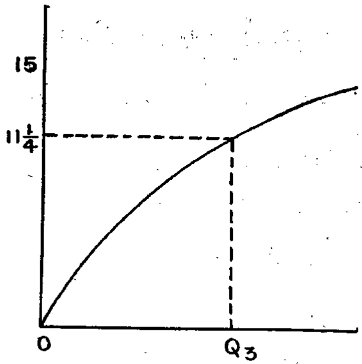
$$= 17.25$$

மேல் கால்ம அளவு 17.25

4. வரைபடத்திலிருந்து மேல் கால்மம் கணிப்பு

நடுவன், முதல் கால்ம அளவு போன்று, மூன்றாம் அல்லது மேல் கால்ம அளவையும் வரைபடத்திலிருந்து கணிக்கலாம். குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணிற்கான உச்சிக்கோட்டை வரையவும். பிரிவுகளின் கீழ் எல்லை அளவுகள் X அச்சிலும், கூட்டு அலைவெண் அளவுகள் Y அச்சிலும் குறிக்கப்படும். மூன்றாம் கால்ம அளவான Q_3 பரவலை 3:1 என்ற விகிதத்தில் வகுப்பதால், Y அச்சில் $\frac{3N}{4}$ என்ற அளவிற்குச் சரியான

இடத்தைக் குறிக்க வேண்டும். Y அச்சில் இந்த இடத்திலிருந்து X அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோட்டை உச்சிக்கோட்டை வெட்டும்படி வரைய வேண்டும். உச்சிக் கோட்டை வெட்டும் இடத்திலிருந்து X அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் Y அச்சுக்கு



படம் 15
மூன்றாம் கால்ம அளவு

இணையாகவும் ஒரு கோடு வரைந்து அது X அச்சை வெட்டும் படி செய்ய வேண்டும். X அச்சில் வெட்டுப்படும் இடத்திற்கு ஏற்ற அளவே மூன்றாம் கால்ம அளவாகும்.

குணங்கள்

1. மூன்றாம் கால்ம அளவும், பரவலில் உள்ள உறுப்புகள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்படுகின்றனவோ அதே அளவையில் கொடுக்கப்படவேண்டும்.

2. மூன்றாம் கால்ம அளவின் மதிப்பு உறுப்புகளின் இட நிலையைப் பொறுத்து மாறுமே யல்லாது உறுப்புகளின் மதிப்பையோ, உருவையோ பொறுத்து மாறுவ தில்லை.

நாம் கீழ் கால்ம அளவை முதல் கால்ம அளவு (Q_1) என்றும் மேல் கால்ம அளவை மூன்றாம் கால்ம அளவு என்றும் (Q_3) குறிப்பிட்டோம். எனவே எஞ்சிய இரண்டாம் கால்ம அளவு (Q_2) எங்கே என்ற வினா எழுவது இயற்கையே. இரண்டாம் கால்ம அளவும், நடுவன் அளவும் ஒன்றே என்று உணர வேண்டும்.

ஐந்தளவுகள் (Quintiles)

முன்பு பரவலை முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் கால்ம அளவுகளால் 4 பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம் எனக் கண்டோம். இது போன்று பரவலை ஐந்தளவுகளால் ஐந்து சமபாகங் களாகப் பிரிக்கலாம். அவைகள் முறையே, முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் மற்றும் நான்காம், ஐந்தளவுகள் என்று அழைக் கப்படும்.

கால்ம அளவுகளைக் கணித்தது போன்றே பலவகை ஐந்த ளவுகளையும் கணிக்கலாம். செயல் முறைகள் ஒன்றே. ஆனால் பரவல்களில் இவ் அளவுகளின் இடநிலைகள் மாறுபடும். எனவே அதற்கு ஏற்றாற் போன்று வாய்ப்பாடுகளும் சிறிது மாறு படும்.

தொகுக்கப்படா விவரங்களுக்கும் தொடர்பில்லாப் பரவல் களுக்கும் கீழே உள்ள வாய்ப்பாடுகள் பயன்படுத்தப்படும்.

$$\text{முதல் ஐந்தளவு} = \frac{(n+1)}{5}$$

$$\text{2ம் ஐந்தளவு} = \frac{2\,(n+1)}{5}$$

$$\text{3ம் ஐந்தளவு} = \frac{3\,(n+1)}{5}$$

$$\text{4ம் ஐந்தளவு} = \frac{4\,(n+1)}{5}$$

தொடர்புடைப் பரவலுக்குக் கீழேயுள்ள வாய்ப்பாடுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\text{முதல் ஐந்தளவு} = l + \frac{(N/5 - m)\,c}{f}$$

$$\text{2ம் ஐந்தளவு} = l + \frac{(2N/5 - m)\,c}{f}$$

$$\text{3ம் ஐந்தளவு} = l + \frac{(3N/5 - m)\,c}{f}$$

$$\text{4ம் ஐந்தளவு} = l + \frac{(4N/5 - m)\,c}{f}$$

இத்தகைய வெவ்வேறு ஐந்தளவுகளை வரைபடத்திலிருந்தும் கணிக்கலாம். Y அச்சிலிருந்து X அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்து உச்சிக் கோட்டை வெட்டும்படி செய்து பின்னர் அவ்வெட்டுமிடங்களிலிருந்து X அச்சுக்கு செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்து, X அச்சில் வெட்டும் இடங்களின் மதிப்பை ஐந்தளவுகளாக கொள்ளலாம். ஆனால், Yஅச்சிலிருந்து Xஅச்சுக்கு இணைக்கோடுகள் வரைய வேண்டிய இடங்கள் முறையே $N/5$, $2N/5$, $3N/5$ மற்றும் $4N/5$ என்ற அலைவெண்ணுக்கு ஏற்ற இடமாக இருக்க வேண்டும்.

குணங்கள்

1. ஐந்தளவுகள், பரவலில் உள்ள உறுப்புகள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளனவோ அதே அளவையில்தான் கொடுக்கப்படவேண்டும்.
2. ஐந்தளவின் மதிப்புகள், உறுப்புகளின் இட நிலைகளைப் பொறுத்து அமையுமே யல்லாது உறுப்புகளின் மதிப்பையோ உருவையோ பொறுத்து அமையாது.

பதின்ம அளவுகள்
(Deciles)

பரவலைப் பத்து சம பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம். இம்முறையில் பதினளவுகள் அல்லது தசமஅளவுகள் என்று சொல்லப்படும் ஒன்பது இட நிலைகள் உண்டாகும். ஐபான் அளவு இரண்டாம் கால்ம அளவுக்கும் நடுவன் அளவிற்கும் சமமாகும். இந்த ஒன்பது தசம அளவுகளும் முறையே D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, மற்றும் D_9 என்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

தொகுக்கப்படா விவரங்களுக்கான பதின்ம அளவுகளின் கணிப்பு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள் முதலில் ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட வேண்டும். அவைகளின் உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 'n' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்பட வேண்டும். பின்னர், $(n+1)$ என்ற எண்ணையும் கணிக்க வேண்டும். பிறகு $(n+1)$ ஐ பத்து கொண்டு வகுக்க வேண்டும். வகுத்துக் கிடைக்கும் ஈவை எந்தப் பதினளவு வேண்டுமோ அந்த எண்ணால் பெருக்க வேண்டும். பின்னர் கீழே கொடுத்துள்ள வாய்ப்பாடுகளைப் பயன்படுத்திப் பதின்மளவுகள் கணிக்கலாம்.

$D_1 = (n+1)/10$ வது உறுப்பின் மதிப்பு
$D_2 = 2(n+1)/10$,,
$D_3 = 3(n+1)/10$,,
$D_4 = 4(n+1)/10$,,
$D_5 = 5(n+1)/10$,,
$D_6 = 6(n+1)/10$,,
$D_7 = 7(n+1)/10$,,
$D_8 = 8(n+1)/10$,,
$D_9 = 9(n+1)/10$,,

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பதின்ம அளவுகளைக் காண்போம்.

26, 15, 20, 18, 25, 17, 29, 40, 35, 28, 31, 42, 50, 53, 60, 65,

இவ்விவரங்கள் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி அமைக்கப்பட வேண்டும்.

15, 17, 18, 20, 25, 26, 28, 29, 31, 35, 40, 42, 50, 53, 60, 65

மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 16.

$$n + 1 = 17.$$

$$\frac{n+1}{10} = 17/10$$

$D_1 = \frac{1(n+1)}{10} = \frac{17}{10}$ 1.7வது உறுப்பின் மதிப்பு

$D_2 = \frac{2(n+1)}{10} = \frac{2 \times 17}{10}$ 3.4 ,,

$D_3 = \frac{3(n+1)}{10} = \frac{3 \times 17}{10}$ 5.1 ,,

$D_4 = \frac{4(n+1)}{10} = \frac{4 \times 17}{10}$ 6.8 ,,

$D_5 = \frac{5(n+1)}{10} = \frac{5 \times 17}{10}$ 8.5 ,,

$$D_6 = \frac{6\,(n+1)}{10} = \frac{6 \times 17}{10} \quad 10.2 \quad ,,$$

$$D_7 = \frac{7\,(n+1)}{10} = \frac{7 \times 17}{10} \quad 11.9 \quad ,,$$

$$D_8 = \frac{8\,(n+1)}{10} = \frac{8 \times 17}{10} \quad 13.6 \quad ,,$$

$$D_9 = \frac{9\,(n+1)}{10} = \frac{9 \times 17}{10} \quad 15.3 \quad ,,$$

$D_1 = 1.7$வது உறுப்பு

= முதல் உறுப்பின் மதிப்பு + முதலாவது, இரண்டாவது உறுப்புகளின் மதிப்பின் வேறுபாட்டின் 0.7 மடங்கு

$= 15 + 0.7\,(17 - 15)$

$= 15 + 0.7 \times 2$

$= 15 + 1.4 = 16.4$

$D_2 = 3 \cdot 4$ வது உறுப்பின் மதிப்பு

= 3 வது உறுப்பின் மதிப்பு + 3வது மற்றும் 4வது உறுப்புகளின் மதிப்பின் 0.4 மடங்கு

$= 18 + 0.4\,(20 - 18)$

$= 18 + 0.8 = 18.8.$

$D_8 = 5.1$ வது உறுப்பு

= 5வது உறுப்பின் மதிப்பு + 5 மற்றும் 6வது உறுப்புகளின் வேறுபாட்டின் 0.1 பங்கு

$= 25 + 0.1\ (26 - 25)$

$= 25 + 0.1 = 25.1$

$D_4 = 6.8$ வது உறுப்பின் மதிப்பு

= 6வது உறுப்பின் மதிப்பு + 6 மற்றும் 7வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் 0.8 பங்கு

$= 26 + 0.8\,(28 - 26)$

$= 26 + 1.6$

$= 27.6$

D_5 = 8.5வது உறுப்பு

= 8வது உறுப்பின் மதிப்பு +8 மற்றும் 9வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் 0.5 பங்கு

= 29 + 0.5 (31 − 29)

= 29 + 1.0 = 30.

D_6 = 10.2 வது உறுப்பு

= 10வது உறுப்பின் மதிப்பு + 10 மற்றும் 11வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் 0.2 பங்கு

= 35 + 0.2 (40 − 35)

= 35 + 1.0 = 36.

D_7 = 11.9 வது உறுப்பு

= 11வது உறுப்பின் மதிப்பு + 11 மற்றும் 12வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டில் 0.9 பங்கு

= 40 + 0.9 (42 − 40)

= 40 + 1.8

= 41.8

D_8 = 13.6வது உறுப்பு

= 13வது உறுப்பின் மதிப்பு 13 + மற்றும் 14வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டில் 0.6 பங்கு

= 50 + 0.6 (53 − 50)

= 50 + 1.8 = 51.8

D_9 = 15.3வது உறுப்பு

= 15வது உறுப்பின் மதிப்பு + 15 மறறும 16வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டில் 0.3 பங்கு

= 60 + 0.3 (65 − 60)

= 60 + 1.5 = 61.5

$N = 24; \quad N+1 = 24+1 = 25$

$$\frac{N+1}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$$

$$D_1 = 1\frac{(N+1)}{10} = 1\frac{(24+1)}{10}$$

$$= \frac{25}{10}$$

= 2.5 வது உறுப்பு

2.5வது உறுப்பின் மதிப்பு = 25.

$$D_2 = \frac{2\ (N+1)}{10} = \frac{2 \times 25}{10}$$

= 5வது உறுப்பு

5வது உறுப்பின் மதிப்பு = 35

$$D_3 = \frac{3\ (N+1)}{10} = \frac{3 \times 25}{10}$$

= 7.5 உறுப்பு

= 7.5 வது உறுப்பின் மதிப்பு = 45.

$$D_4 = \frac{4\ (N+1)}{10} = \frac{4 \times 25}{10}$$

= 10 வது உறுப்பு

10வது உறுப்பின் மதிப்பு = 45.

$$D_5 = \frac{5\ (N+1)}{10} = \frac{5 \times 25}{10}$$

= 12.5வது உறுப்பு

= 12.5 வது உறுப்பின் மதிப்பு = 45.

$$D_6 = \frac{6\ (N+1)}{10} = \frac{6 \times 25}{10}$$

= 15வது உறுப்பு

15வது உறுப்பின் மதிப்பு = 55.

$$D_7 = \frac{7\ (N+1)}{10} = \frac{7 \times 25}{10}$$ = 17.5வது உறுப்பு

= 17.5வது உறுப்பின் மதிப்பு = 55

$$D_8 = \frac{8\ (N+1)}{10} = \frac{8 \times 25}{10}$$

= 20வது உறுப்பு

20வது உறுப்பின் மதிப்பு = 55

$$D_9 = \frac{9\ (N+1)}{10} = \frac{9 \times 25}{10}$$

= 22.5வது உறுப்பு

22.5வது உறுப்பின் மதிப்பு = 65.

3. தொடர்புடைப் பரவலின் பதின்மளவு கணிப்பு

நடுவனளவு, கால்ம அளவுகள், ஐந்தளவுகள் கணித்தது போன்று தொடர்புடை அலைவெண் பரவலுக்குத் பதின்மனளவு கணிக்கலாம். வாய்ப்பாட்டில் ஏற்படும் மாற்றம் நடுவளைவில் $N/2$ என்று கொடுத்ததற்குப் பதிலாகவும் முதற் கால்மளவில் $N/4$ என்று குறித்தது போல் அல்லாமலும் மூன்றாம் கால்மளவில் $3N/4$ என்று கொடுத்ததுபோல் அல்லாமல் இங்கு $N/10$ என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

செயல் முறைகள் பின்வருமாறு

1. கூட்டு அலைவெண்கள் கணிக்கப்பட வேண்டும்.
2. மொத்த அலைவெண் 'N' என்று குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.
3. பிரிவுகளின் உண்மையான கீழ் எல்லை அளவுகள் குறிக்கப்பட வேண்டும்.

வாய்ப்பாடுகள் பின்னர் கீழ் வருமாறு மாறும்.

$$D_1 = l + \frac{(N/10 - m)\,c}{f}$$

$$D_2 = l + \frac{(2\,N/10 - m)c}{f}$$

$$D_3 = l + \frac{(3\,N/10 - m)c}{f}$$

$$D_4 = l + \frac{(4N/10 - m)\,c}{f}$$

$$D_5 = l + \frac{(5N/10 - m)\,c}{f}$$

$$D_6 = l + \frac{(6N/10 - m)c}{f}$$

$$D_7 = l + \frac{(7N/10 - m)c}{f}$$

$$D_8 = l + \frac{(8N/10 - m)c}{f}$$

$$D_9 = l + \frac{(9N/10 - m)c}{f}$$

வாய்ப்பாட்டின் விளக்கங்கள் பின்வருமாறு

l = பதின்மப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

c = பதின்மப் பிரிவின் இடைவெளி

f = பதின்மப் பிரிவின் அலைவெண்

m = பதின்மப் பிரிவின் முன் பிரிவின் கூட்டு அலைவெண்

இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் கவனிப்போம்.

பிரிவு	அலைவெண்	கூட்டு அலைவெண்
0 – 5	3	3
5 – 10	4	7
10 – 15	7	14
15 – 20	8	22
20 – 25	2	24
25 – 30	1	25
	25	

இரண்டாவது கால வரிசையில் கொடுத்துள்ள அலை வெண்ணிலிருந்து 3வது கால வரிசையில் கொடுத்துள்ள கூட்டு அலைவெண் கணிக்கப்பட வேண்டும்.

மொத்த அலைவெண் $= N = 25$

$D_1 = N/10$ வது உறுப்பு

$N/10 = \frac{25}{10} = 2.5$ வது உறுப்பு

$$D_1 = l + \frac{(N/10 - m)\,c}{f}$$

$$= 0 + \frac{\left(\frac{25}{10} - 0\right)5}{3}$$

$$\frac{25}{10} \times \frac{5}{3} = 4.17$$

$D_2 = 2N/10$ வது உறுப்பு

$= 2N/10 = (2 \times 25)/10 = 5$வது உறுப்பு

5வது உறுப்பு 5 – 10 வரை என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$D_2 = l + \frac{(2N/10 - m)\,c}{f}$$

$$= 5 + \frac{\left(\frac{2 \times 25}{10} - 3\right)5}{4}$$

$$= 5 + \frac{(5 - 3) \times 5}{4} = 5 + 2.5 = 7.5$$

$D_3 = 3N/10 = (3 \times 25)/10 = 7.5$

பதின்ம அளவு (10 — 15) என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$= 10 + \frac{(7.5 - 7) \times 5}{7}$$

$$= 10 + \frac{1}{2} \times 5/7 = 10\frac{5}{14}$$

$$D_4 = 4N/10 = \frac{4 \times 25}{10} = 10.$$

D_4 பதின்ம அளவு = 10 — 15. என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$D_4 = 10 + \frac{(10 - 7) \times 5}{7}$$

$$= 10 + \frac{3 \times 5}{7}$$

$$= 12\frac{1}{7}$$

$$D_5 = 5N/10 = \frac{5 \times 25}{10} = 12.5$$

D_5 பதின்ம அளவு=10—15. என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$D_5 = 10 + \frac{(12.5 - 7) \times 5}{7}$$

$$= 10 + \frac{5.5 \times 5}{7}$$

$$= 10 + \frac{27.5}{7}$$

$$= 10 + 3.93 = 13.93$$

$$D_6 = 6N/10 = \frac{6 \times 25}{10} = 15.00$$

D_6 பதின்ம அளவு = 15—20 என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$D_6 = 15 + \frac{15 - 14}{8} \times 5 = 15 + \frac{5}{8} = 15.63$$

$$D_7 = 7N/10 = \frac{7 \times 25}{10} = 17.5$$

D_7 பதின்ம அளவு = 15—20 என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$D_7 = 15 + \frac{(17.5 - 14) \times 5}{8}$$

$$= 15 + \frac{3.5 \times 5}{8} = 15 + 17.5/8$$

$$= 17.2$$

$$D_8 = 8N/10 = \frac{8 \times 25}{10} = 20$$

D_8 பதின்ம அளவு $= 15—20$ என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$D_8 = 15 + \frac{(20 - 14) \times 5}{8}$$

$$= 15 + \frac{6 \times 5}{8} = 18.75$$

$$D_9 = 9N/10 = \frac{9 \times 25}{10} = 22.5$$

D_9 பதின்ம அளவு $= 20—25$ என்ற பிரிவில் அமைந்துள்ளது.

$$\therefore D_9 = 20 + \frac{(22.5 - 22) \times 5}{2}$$

$$= 20 + \frac{0.5 \times 5}{2}$$

$$= 21.25$$

வரைபடத்திலிருந்து கணிப்பு

பதின்ம அளவுகள் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணைக் குறிக்கும் உச்சிக் கோட்டிலிருந்தும் கணிக்கப்படலாம்.

$2N/10$, $3N/10$, $4N/10$, $5N/10$, $6N/10$, $7N/10$, $8N/10$ மற்றும் $9N/10$ என்ற அளவுகளுக்கு ஏற்ற இட நிலைகளை Y அச்சில் குறிக்க வேண்டும். பின்னர் இந் நிலைகளிலிருந்து X அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்து உச்சிக் கோட்டை வெட்டும்படி செய்ய வேண்டும். பின்னர் இவ் வுச்சிக் கோட்டின் வெட்டுமிடங்களிலிருந்து Y அச்சுக்கு இணையாகவும் X அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் கோடுகள் வரைந்து X அச்சை வெட்டும்படி செய்ய வேண்டும். உச்சிக் கோடுகளில் உள்ள வெட்டுமிடங்களை P_1, P_2, P_3, P_4, P_5,

P_6, P_7, P_8 P_9 மற்றும் P_9 என்றும், X அச்சில்வெட்டுமிடங்களை X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 மற்றும் X_9 என்றும் குறிப்பிடலாம். X அச்சில் உள்ள இந்த 9 இடநிலைகளுக்கு ஏற்ற மதிப்பு பதின்ம அளவுகளாகும்.

நூற்றளவு அல்லது நூற்றுமான அளவுகள் (Percentiles)

மையப் போக்கு அளவுகளில் பிறிதொன்று நூற்றுமான அளவு ஆகும். இவ் அளவுகள் பரவலை 100 பாகங்களாகப் பிரிக்கும் இடநிலைகளாகும். இவைகள் நூற்றுமான அளவுகள் என்றும் 'P' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும். மேலும் நூற்றுமான அளவு, வரிசை எண்ணிற்கு ஏற்றாற் போன்று 'P' என்ற எழுத்துடன் 1 2, 3 என்ற அடி எண்ணையும் சேர்த்து P_1, P_2, P_3, P_4,....................P_{50}..................P_{99} என்று குறிக்கப்படும்.

தொகுக்கப்படா விவரங்களுக்குச் சத அளவு அல்லது நூற்றளவு கணிப்பு

முன்பு கால்ம அளவுகள், ஐந்தளவுகள், தசம அளவுகளுக்குக் கணித்தது போன்றதுதான் நூற்றுமான அளவுக் கணிப்பும். ஒரு வேறுபாடு என்னவென்றால் $(n+1)$ என்பது 100 கொண்டு வகுக்கப்படும். வெவ்வேறு விதமான நூற்றுமான அளவுகள் குறிக்கும் விவரங்கள் பின்வருமாறு அமையும்.

$P_1 = 1\,(n+1)/100$வது உறுப்பின் மதிப்பு

$P_3 = 3\,(n+1)/100$வது உறுப்பின் மதிப்பு

$P_5 = 5\,(n+1)/100$,,

$P_{10} = 10(n+1)/100$,,

$P_{25} = 25(n+1)/100$,,

$P_{50} = 50(n+1)/100$,,

$P_{99} = 99(n+1)/100$,,

பொது வாய்ப்பாடு கீழ் வருமாறு

$P_r = r\dfrac{(n+1)}{100}$ வது உறுப்பின் மதிப்பு. இங்கு 'r' என்ற

எழுத்தின் மதிப்பு ஒன்று முதல் 99 வரையுள்ள எண்களின் மதிப்பைக் குறிக்கும். 'n' என்பது வரிசையிலுள்ள மொத்த நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

கீழ் வரும் விவரங்களுக்கு 15, 30, 65வது சத அளவுகள் கணிப்பு

21, 28, 34, 15, 30, 70, 65, 48, 51, 75

இவ்விவரங்களைக் கீழ் வருமாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

15, 21, 28, 30, 34, 48, 51, 65, 70, 75

மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= n = 10$

$\therefore n+1 = 10+1 = 11$

$$P_{15} = \frac{15 \times (10+1)}{100}$$

$$= \frac{15 \times 11}{100} = \frac{165}{100} = 1.65$$

1.65வது உறுப்பின் மதிப்பு = ஒன்றாவது உறுப்பின் மதிப்பு + முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் 0.65 பங்கு

$$= 15 + 0.65 \ (21 - 15)$$
$$= 15 + 0.65 \times 6$$
$$= 15 + 3.90$$
$$= 18.90$$

$$P_{30} = \frac{30 \times (10+1)}{100}$$

$$= \frac{30 \times 11}{100} = 3.3 \text{ வது உறுப்பு}$$

3.3 வது உறுப்பின் மதிப்பு = மூன்றாவது உறுப்பின் மதிப்பு + மூன்றாவது, நான்காவது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் 0.3 பங்கு

$$= 28 + 0.3 \ (30 - 28)$$
$$= 28 + 0.3 \times 2$$
$$= 28.6$$

$$P_{65} = \frac{65\ (10+1)}{100} = 7.15$$

7.15வது உறுப்பின் மதிப்பு = 7வது உறுப்பின் மதிப்பு + 0.15 × 7வது 8வது உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் வேறுபாடு

$= 51 + 0.15\ (65 - 51)$

$= 51 + 2.10$

$= 53.10.$

2. தொடர்பில்லாப் பரவலுக்கான நூற்றுமான அளவு கணிப்பு

கொடுத்துள்ள அலைவெண், குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண்ணாக மாற்றப்பட வேண்டும். அலைவெண்ணின் மொத்த மதிப்பு கண்டு பிடிக்க வேண்டும். நூற்றுமான அளவுகள் பின்வருமாறு கணிக்கப்பட வேண்டும்.

$P_1 = (n+1)/100$வது உறுப்பின் மதிப்பு

$P_{25} = 25\ (n+1)/100$

$P_{99} = 99\ (n+1)/100$

எடுத்துக்காட்டு

5வது, 20வது, 44வது நூற்றுமான அளவுகளைக் கீழ் கண்ட விவரங்களுக்குக் கணிக்கவும்.

மதிப்பு	அலைவெண்	கூட்டு அலைவெண்
25	4	4
35	6	10
45	5	15
55	7	22
65	3	25
75	2	27
85	2	29

$N = 29 \qquad N+1 = 30.$

$$\therefore \frac{(N+1)}{10} = \frac{30}{10} = \frac{3}{10}$$

முதலில் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் 3வது நிரை வரிசையில் கொடுத்தது போல் கணிப்போம்.

$$P_5 = \frac{5\,(29+1)}{100} = \frac{5 \times 30}{100} = 1.5 \text{ வது உறுப்பு}$$

1.5 வது உறுப்பின் மதிப்பு $=$ 25.

$$P_{20} = \frac{20\,(29+1)}{100} = \frac{20 \times 30}{100} = 6 \text{வது உறுப்பு}$$

6வது உறுப்பின் மதிப்பு $=$ 35

$$P_{44} = \frac{44\,(29+1)}{100} = \frac{44 \times 30}{100} = 13.2 \text{ வது உறுப்பு}$$

$13\frac{1}{5}$வது உறுப்பின் மதிப்பு $=$ 45.

3. தொடர் அலைவெண் பரவலுக்குச் சத அளவு கணிப்பு

பிரிவுகளின் உண்மையான கீழ் எல்லைகளைக் கணிக்க வேண்டும். எல்லா அலைவெண்களின் மொத்தம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். பின்னர் குறைந்த நிலைக் கூட்டு அலைவெண் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

$P_r = N_{r/}100$ என வைத்துக் கொள்வோம்.

கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணைக்கு P_{15}, P_{22}, P_{70} கண்டு பிடிப்போம்.

பிரிவு	அலைவெண்	கூட்டு அலைவெண்
0 – 5	4	4
5 – 10	6	10
10 – 15	5	15
15 – 20	7	22
20 – 25	3	25
25 – 30	2	27
30 – 35	3	30
மொத்தம்	30	

$N = 30; \therefore N/100 = 30/100 = 3/10$

$$P_{15} = \frac{15 \times 30}{100} = 4.5$$

*P*15வது உறுப்பு அமைந்துள்ள பிரிவு

= 5—10.

$$P_{15} = l + \frac{(15\,N/100 - m) \times c}{f}$$

$$= 5 + \frac{(4.5 - 4) \times 5}{6}$$

$$= 5 + \tfrac{1}{2} \times 5/6 = 5\tfrac{5}{12}$$

$$P_{22} = \frac{22 \times 30}{100} = 6.6$$

இது அமைந்துள்ள பிரிவு 5—10.

$$P_{22} = 5 + \frac{(6.6 - 4) \times 5}{6}$$

$$= 5 + \frac{2.6 \times 5}{6} = 5 + 13/6 = 7\tfrac{1}{6}$$

$$P_{70} = \frac{70 \times 30}{100} = 21$$

21வது உறுப்பு அமைந்துள்ள பிரிவு

= 15—25.

$$P_{70} = 15 + \frac{(21 - 15) \times 5}{7}$$

$$= 15 + \frac{6 \times 5}{7} = 15 + 4\tfrac{2}{7} = 19\tfrac{2}{7}$$

4. வரைபடத்திலிருந்து கணிப்பு

தொடர் அலைவெண் பரவலின் வரைபடத்திலிருந்தும் நூற்றுமான அளவுகளைக் கணிக்கலாம்.

$N/100$, $2N/100$, $3N/100$, $rN/100$, $99N/100$ என்ற உறுப்புகளுக்கு சமமான இடநிலைகளை Y அச்சில் குறிப்பிட வேண்டும். பின்னர் இந்த இடநிலைகளிலிருந்து X அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்து உச்சிக் கோட்டை P_1, P_2, P_3 P_r..P_{99} என்ற இடங்களில் வெட்டும்படி செய்யவேண்டும். இந்த வெட்டும் இடங்களிலிருந்து X அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் Y அச்சிற்கு இணையாகவும் கோடுகள் வரைந்து X அச்சை X_1, X_2, X_3....X_r, . X_{99} என்ற இடங்களில் வெட்டும்படி செய்ய வேண்டும். X அச்சின் இவ்வெட்டும் இடங்களுக்கு ஏற்ற மதிப்பே சத அளவுகளைக் குறிப்பதாகும்.

தொடர் அலைவெண் பரவலுக்கு நடுவன், கால்ம அளவுகள், ஐந்தளவுகள், பதின்ம அளவுகள் மற்றும் நூற்றுமான அளவுகள் கணிப்பதில் முக்கியமாக கவனிக்க வேண்டியவை கீழ்வருமாறு:

சில சந்தர்ப்பங்களில் பிரிவுகளில் உண்மையான கீழ் அளவுகள் அல்லது மேல் அளவுகளைக் கொடுப்பதற்குப் பதிலாகப் பிரிவுகளின் நடுவளவுகள் கொடுக்கப்படுவது உண்டு. அவ்விடங்களில் எல்லாம் அடுத்தடுத்த பிரிவுகளின் நடுவளவுகளின் வேறுபாட்டைப் பிரிவு இடைவெளியாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர் பிரிவு நடுவளவுகளிலிருந்து பிரிவு இடைவெளி, பிரிவுகளின் கீழ், மேல் எல்லைகள் கணிக்கப்பட வேண்டும். மேலும் பிரிவுகளின் அலைவெண்ணிலிருந்து பிரிவுகளுக்கான் கூட்டு அலைவெண் கணிக்கப்பட வேண்டும்.

குணங்கள்

1. நடுவன் அளவு, கால்ம அளவு, ஐந்தளவு, பதின்ம அளவு, நூற்றுமான அளவுகள் எல்லாம் பரவலின் உறுப்புகள் எந்த அளவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளனவோ அதே அளவைகளில்தான் கொடுக்கப்படும்.

2. இவ் அளவுகள் உறுப்புகளின் இடநிலையைப் பொறுத்து மாறுமேயல்லாது உறுப்புகளின் மதிப்பைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை.

வெவ்வேறு மைய நோக்கு அளவுகளுக்கான வாய்ப்பாடுகள்

அளவுகள்	செப்பனிடா விவரம்	தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவல்	தொடர்புடை அலைவெண் பரவல்
(1)	(2)	(3)	(4)
1. சராசரி	$\Sigma x/n$	$\Sigma xf/n$	$\Sigma \frac{x_i f_i}{N}$
2. நடுவன்	$(n+1)2$	$(N+1)/2$வது உறுப்பு	$N/2$வது உறுப்பு $= l + \frac{(N/2 - m)c}{f}$
3. கீழ்கால்ம அளவு Q_1	$(n+1)/4$	$(N+1)/4$	$= l + \frac{(N/4 - m)c}{f}$
மேல் கால்ம அளவு Q_3	$3(n+1)/4$	$3(N+1)/4$	$= l + \frac{(3N/4 - m)c}{f}$
4. ஐந்தளவு			
(1)	$(n+1)/5$	$(N+1)/5$	$l + \frac{(N/5 - m)c}{f}$
(2)	$2(n+1)/5$	$2(N+1)/5$	$l + \frac{(2N/5 - m)c}{f}$
(3)	$3(n+1)/5$	$3(N+1)/5$	$l + \frac{(3N/5 - m)c}{f}$
(4)	$4(n+1)/5$	$4(N+1)/5$	$l + \frac{(4N/5 - m)c}{f}$

(1)	(2)	(3)	(4)
5. பதின்ம அளவுகள்			
D_1	$(n+1)/10$	$(N+1)/10$	$l + \frac{(N/10-m)\,c}{f}$
$D_2 =$	$2(n+1)/10$	$2(N+1)/10$	$l + \frac{(2N/10-m)\,c}{f}$
$D_3 =$	$3(n+1)/10$	$3(N+1)/10$	$l + \frac{(3N/10-m)c}{f}$
$D_4 =$	$4(n+1)/10$	$4(N+1)/10$	$l + \frac{(4N/10-m)c}{f}$
	$2(n+1)/5$	$2(N+1)/5$	
$D_5 = M =$	$\frac{5(n+1)}{10}$	$\frac{5(N+1)}{10}$	$l + \frac{(5N/10-m)\,c}{f}$
$D_6 =$	$\frac{6(n+1)}{10}$	$\frac{6\,(N+1)}{10}$	$l + \frac{(6N/10-m)\,c}{f}$
$D_7 =$	$\frac{7\,(n+1)}{10}$	$\frac{7\,(N+1)}{10}$	$l + \frac{(7N/10-m)c}{f}$
$D_8 =$	$\frac{8\,(n+1)}{10}$	$\frac{8(N+1)}{10}$	$l + \frac{(8N/10-m)c}{f}$
$=$	$\frac{4\,(n+1)}{5}$	$\frac{4\,(N+1)}{5}$	
$D_9 =$	$\frac{9(n+1)}{10}$	$\frac{9\,(N+1)}{10}$	$l + \frac{(9N/10-m)c}{f}$

6. நூற்றுமான அளவுகள்

(1)	(2)	(3)	(4)
P_1	$(n+1)/100$	$(N+1)/100$	$l + \frac{(N/100 - m)\,c}{f}$
P_5	$5(n+1)/100$	$5(N+1)/100$	$l + \frac{(5N/100 - m)\,c}{f}$
P_{10}	$10(n+1)/100$	$10(N+1)/100$	$l + \frac{(10N/100 - m)\,c}{f}$
P_{20}	$20(n+1)/100$	$20(N+1)/100$	$l + \frac{(20N/100 - m)\,c}{f}$
$P_{25} = Q_1$	$25(n+1)/100$	$25(N+1)/100$	$l + \frac{(25N/100 - m)\,c}{f}$
$P_{30} =$	$30(n+1)/100$	$30(N+1)/100$	$l + \frac{(30N/100 - m)\,c}{f}$
P_{40}	$40(n+1)/100$	$40(N+1)/100$	$l + \frac{(40N/100 - m)\,c}{f}$
$P_{50} = Q_2$	$50(n+1)/100$	$50(N+1)/100$	$l + \frac{(50N/100 - m)\,c}{f}$
$P_{60} = M$	$60(n+1)/100$	$60(N+1)/100$	$l + \frac{(60N/100 - m)\,c}{f}$
P_{70}	$70(n+1)/100$	$70(N+1)/100$	$l + \frac{(70N/100 - m)\,c}{f}$
$P_{75} = Q_3$	$75(N+1)/100$	$75(N+1)/100$	$l + \frac{(75N/100 - m)\,c}{f}$

(1)	(2)	(3)	(4)
P_{80}	$80(n+1)/100$	$80(N+1)/100$	$l+\frac{(80N/100-m)\,c}{f}$
P_{85}	$85(n+1)/100$	$85(N+1)/100$	$l+\frac{(85N/100-m)\,c}{f}$
P_{90}	$90(n+1)/100$	$90(N+1)/100$	$l+\frac{(90N/100-m)\,c}{f}$
P_{99}	$99(n+1)/100$	$99(N+1)/100$	$l+\frac{(99N/100-m)\,c}{f}$

மோடு அல்லது முகடு (Mode)

மோடு அல்லது முகடு என்பது பிறிது ஒரு மைய நிலைப் போக்களவாகும். அடிக்கடி தோன்றக்கூடிய அளவு அல்லது குறிப்பாக எடுத்துக்காட்டுமளவு என்றும் இதை விளக்கலாம். முகடு மிக உயர்ந்த அல்லது கூடுதலான அல்லது அதிக அலை வெண் கொண்ட அளவைக் குறிப்பதாகும். பகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கும், தொடர்பில்லாப் பரவலுக்கும், தொடர்புடைப் பரவலுக்கும் முகடு கணிக்கலாம்.

1. தொகுக்கப்படா விவரங்களுக்கான முகடு கணிப்பு

தொகுக்கப்படாத விவரங்களுக்கான மோட்டளவை எளிதில் கணிக்கலாம். முதலில் செய்ய வேண்டியது கொடுத்துள்ள விவரங்களை ஏறுவரிசையில் மாற்றியமைப்பதாகும். பின்னர், இவ்வரிசையிலிருந்து எந்த அளவு மிக அதிகமாக வருகின்றதோ, அல்லது எந்த அளவு மிகப் பெரிய அளவில் அல்லது அடிக்கடி தோன்றுகிறதோ அதே அளவை முகடாகத் தெரிந்தெடுக்கலாம். ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

7, 8, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 25, 25, 29.

இதில் 10, 12, 25 என்ற மதிப்புகள் ஒன்றிற்கு மேற்பட்டு மீண்டும் வருகின்றன. 12, 25 என்ற இரு விவரங்கள் ஒவ்வொன்றும் இரு தடவைகள் தோன்றிய போதிலும் 10 என்ற விவரம் 3 தடவை வந்துள்ளது. எனவே இங்கு 10 என்ற அளவை முகட்டளவாக எடுக்கலாம்.

முகட்டைப் பொறுத்தளவில், ஏதாவது ஓர் உறுப்பின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றம், முகட்டளவின் மதிப்பை மாற்றுவதாக அமையும். முன்னுள்ள எடுத்துக்காட்டில் '10' என்ற ஒரு விவரத்தை '25' என்ற விவரமாக மாற்றினால், வரிசை கீழ் கண்டவாறு மாறுதல் அடையும்.

7, 8, 10, 10, 11, 12, 12, 25, 25, 25, 29.

இவ்வாறு ஒரு விவரத்தின் மதிப்பில் ஏற்படும் சிறு மாற்றத்தால், முகட்டளவின் மதிப்பே மாறுபடுவதால், முகட்டளவு மிகவும் நிலையற்றது என்பர்.

ஏக முகட்டு வரிசை (Uni-Modal Series)

ஒரு வரிசையில் ஒரே ஒரு முகட்டளவு இருக்கலாம். அவ் வரிசை ஏக முகட்டு வரிசை எனப்படும்.

7, 8, 10, 10, 10, 11, 12, 12.

முகடு = *10*

இரு முகட்டு வரிசை (Bi-Modal Series)

சில வரிசைகளில் இரண்டு முகட்டளவுகள் இருக்கலாம். அத்தகைய வரிசைகள் இரு முகட்டு வரிசைகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு

7, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 12.

இக்கோர்வையில், 10, 12 என்ற இரு மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் மூன்று முறை வந்துள்ளன. இங்கு முகட்டளவுகள் 10 மற்றும் 12 என்பதாகும்.

மும்முகட்டுக் கோர்வை (Tri-Modal Series)

மூன்று முகட்டளவுகள் கொண்ட வரிசை மும்முகட்டளவுக் கோர்வை எனப்படும்.

7, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 12.

இங்கு 10, 11, 12 என்ற மூன்று மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் இரு முறை வந்துள்ளன. எனவே இது மும்முகட்டளவுக் கோர்வையாகும். மோட்டளவு 10, 11, 12.

பல் முகட்டுக் கோர்வை (Multi-Modal Series)

மூன்றிற்கு மேற்பட்ட முகட்டளவு கொண்ட கோர்வை பல் முகட்டளவுக் கோர்வை எனப்படும்.

2. தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டளவு

தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவலில் உயர்ந்த அல்லது அதிக அலைவெண் உடைய மதிப்பும் முகட்டளவாகக் கருதப் படும்.

எடுத்துக்காட்டு

உறுப்புகளின் மதிப்பு	அலைவெண்
8	4
10	3
12	2
14	7
16	2
18	4
20	1

இவ்வெடுத்துக்காட்டில் 14 என்ற மதிப்பு பெரிய அளவான 7 என்ற அலைவெண்ணைக் கொண்டதாகும். எனவே 14 இதன் முகட்டளவாகும்.

3. தொடர்புடை அலைவெண் பரவலுக்கான முகட்டளவு

அ. செப்பனிடா முறை

1. *முதலில் பரவலில் பெரிய அல்லது அதிக அலை வெண்ணைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.*

2. *அதிக அலைவெண்ணுடைய பிரிவைக் குறிக்க வேண்டும். அதிக அலைவெண்ணுடைய பிரிவு 'முகடுடைப் பிரிவு'* (Modal Class) *எனப்படும்.*

3. முகடு, பிரிவின் நடுவளளவு, அதாவது பிரிவின் கீழ் மேல் அளவுகளின் சராசரி நடு அளவாகக் கருதப்படும்.

இத்தகைய எடுகோள் ஓர் உத்தேசமானதேயல்லாது உண்மையைப் பிரிதிபலிப்பதாகாது. எனவே இவ்வாறு கணிக்கப் படும் கணிப்பும் உத்தேசமானதேயன்றி உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டு (1)

எடை (கி.கி.)	அலைவெண்
40 – 50	4
50 – 60	6
60 – 70	7
70 – 80	12
80 – 90	4
90 – 100	6
100 – 110	8

கூடுதல் அலைவெண் = 12, முகட்டுடை வகுப்பு = 70 – 80.

$$\text{முகடுடைப் பிரிவின் நடுவளவு} = \frac{70 + 80}{2} = \frac{150}{2}$$

$$= 75$$

∴ முகடு = 75 கி.கி.

எடுத்துக்காட்டு (2) — குழல் மின் விளக்கின் பரவல்

எரியும் கால அளவு மணி (x)	குழல் மின் விளக்கின் எண்ணிக்கை (f)
400 — 700	7
700 — 1000	10
1000 — 1300	4
1300 — 1600	14
1600 — 1900	6
1900 — 2200	4
2200 — 2500	2

அதிக அலைவெண் $= 14$

மோடுடை வகுப்பு $= 1300 - 1600$

$$= \frac{1300 + 1600}{2}$$

நடுவளவு $= \frac{2900}{2} = 1450$

முகட்டளவு $= 1450$ மணி.

முகட்டுடைப் பிரிவின் முன் பின் பிரிவுகளின் எடை அடிப்படையில் கணிப்பு

சில சந்தர்ப்பங்களில் முகட்டளவுகளின் மதிப்பு முகட்டுடைப் பிரிவின் முன் மற்றும் பின் பிரிவுகளின் அலைவெண்களால் பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதுண்டு.

முன் பிரிவின் அலைவெண் பின் பிரிவின் அலைவெண்ணை விட அதிகமாக இருந்தால், முகட்டளவு முகடுடைப் பிரிவின் நடுவளவோடு இணைந்திருக்காமல் முகடுடைப் பிரிவின் கீழ் நிலை அளவோடு நெருங்கி இருக்கும்.

மாறாக, பின் பிரிவின் அலைவெண் முன் பிரிவின் அலை வெண்ணைவிட அதிகமாக இருந்தால் முகட்டளவு முகடுடைப் பிரிவின் நடுவளவை ஒட்டி இருப்பதைவிட முகடுடைப் பிரிவின் மேல்நிலை அளவை ஒட்டியே இருக்கும்.

எனவே, முகட்டளவை கணிப்பதில் முகட்டுடைப் பிரிவின் முன் மற்றும் பின் பிரிவுகளின் அலைவெண்களின் அடிப்படை யிலும் கணிப்பதுண்டு:

எடுத்துக்காட்டு (1)

எடை (கி.கி.) (x) (1)	கட்டுக்களின் எண்ணிக்கை (f) (2)
40 – 50	4
50 – 60	6
60 – 70	7
70 – 80	12 ——— X
80 – 90	4
90 – 100	6
100 – 110	8

முகட்டுடைப் பிரிவு = 70 – 80

முகட்டுடைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை (l) = 70

முன் பிரிவு = 60 – 70

முன் பிரிவின் அலைவெண் (f_1) = 7

பின் பிரிவு = 80 – 90

பின் பிரிவின் அலைவெண் (f_2) = 4

முகடுடைப் பிரிவின் இடைவெளி (c) = 80 – 70 = 10

பின் வரும் வாய்ப்பாட்டைப் பயன் படுத்தலாம்

$$\text{முகடு} = l + \frac{c.\ f_2}{f_1 + f_2}$$

இவ்விதியின் விவரங்களின் மதிப்புகளை இணைத்துப் பார்த்தால் முகட்டளவு கிடைக்கும்.

$$\text{முகடு} = 70 + \frac{10 \times 4}{7 + 4}$$

$$= 70 + \frac{40}{11} = 70 + 3\frac{7}{11} = 73\frac{7}{11} \text{ அல்லது}$$

$$= 73.64 \text{ கி.கி.}$$

எடுத்துக்காட்டு (2)

எரியும் கால அளவு மணி (*x*)	குழல் மின் விளக்கு எண்ணிக்கை (*f*)
400 – 700	7
700 – 1000	10
1000 – 1300	4
1300 – 1600	14
1600 – 1900	6
1900 – 2200	4
2200 – 2500	2

உயர்ந்த அலைவெண் = 14

மோடல் பிரிவு = 1300 – 1600

முகடுடைப் பிரிவின் உண்மையான கீழ் எல்லை (l) = 1300

முகடுடைப் பிரிவின் இடைவெளி (c) = 1600 – 1300 = 300

முன் பிரிவின் அலைவெண்$(f_1) = 4$

பின் பிரிவின் அலைவெண்$(f_2) = 6$

$$\text{முகடு} = l + \frac{cf_2}{f_1 + f_2}$$

$$= 1300 + \frac{300 \times 6}{4 + 6}$$

$$= 1300 + \frac{1800}{10}$$

$$= 1300 + 180$$

$$= 1480$$

முகடுடைப் பிரிவு, அதன் முன்பின் பிரிவுகளின் அலைவெண்களின் வேறுபாட்டின் அடிப்படையில் முகட்டளவு கணிப்பு

முன்னர் கூறிய வாய்ப்பாடு கீழ்க் கண்டவாறு சிறிது மாறுதலடையும்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{c.\ d_1}{d_1 + d_2}$$

l = முகடுடைப் பிரிவின் உண்மையான கீழ் நிலை அளவு

c = முகடுடைப் பிரிவின் இடைவெளி

d_1 = முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் அதன் முன் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாடு

d_2 = முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் அதன் பின் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாடு

எடுத்துக்காட்டு

எரியும் கால அளவு (x)	குழல் மின் விளக்குகளின் எண்ணிக்கை (f)
400 – 700	7
700 – 1000	10
1000 – 1300	4
1300 – 1600	14
1600 – 1900	6
1900 – 2200	4
2200 – 2500	2

முகடுடைப் பிரிவு = 1300 – 1600

$$l = 1300$$

$$c = 300$$

$$d_1 = 14 - 4 = 10$$

$$d_2 = 14 - 6 = 8$$

இவ்விவரங்களை வாய்ப்பாட்டில் இணைத்துக் கீழ்க் கண்டவாறு முகட்டளவை கணிக்கலாம்.

$$\text{முகடு} = l + \frac{c.\, d_1.}{d_1 + d_2}$$

$$= 1300 + \frac{300 \times 10}{10 + 8}$$

$$= 1300 + \frac{3000}{18}$$

$$= 1300 + 166.67$$

$$= 1466.67 \text{ மணி}$$

குறிப்பு

இரு வாய்ப்பாடுகளிலும் இரண்டாவது வாய்ப்பாடு துல்லியமான அளவைத் தருவதால் அதுவே பெரிதும் விரும்பப் படும்.

முகடு: $l + \frac{c.\, f_2}{f_1 + f_2}$

முகடு: $l + \frac{c.\, d_1}{d_1 + d_2}$

இரண்டாவது வாய்ப்பாட்டில் உள்ள சிறு மாற்றத்தைக் கவனிக்கவும்.

(1) $l + \frac{c.\, f_2}{f_1 + f_2}$ (2) $l + \frac{c.\, d_1}{d_1 + d_2}$

முதல் விதியில் முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண் எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை. ஆனால் இரண்டாவது விதியில் முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண் மறைமுகமாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. ஏனெனில் முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் அதன் முன்னுள்ள பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டையும் அதே போல் முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் அதன் பின்னுள்ள பிரிவின் அலைவெண்ணிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டையும் உள்ளடக்கியுள்ளது. எனவே இரண்டாவது விதி மூலம் கிடைக்கும் முகட்டளவு சிறந்த அளவாகும்.

1. முதல் விதியில் முன் பின் பிரிவுகளின் அலைவெண்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஆனால் இரண்டாவது விதியில் அலைவெண்களின் வேறுபாட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

2. முதல் விதியின் தொகுதியில் கொடுக்கப்பட்டிருப்பது முன்பின் பிரிவின் அலைவெண்கள். ஆனால் இரண்டாவது விதியில் கொடுக்கப்பட்டிருப்பது முகடுடைப் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் அதன் முன் பிரிவின் அலைவெண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாடாகும்.

3. இவ்விரு விதிமுறைகளையும் செயல் முறையில் பயன்படுத்துவதில் சிறிது சிரமம் ஏற்படலாம். சில வேளைகளில் முகடுடைப் பிரிவே கோர்வையின் முதல் பிரிவாகவோ அல்லது கடைசிப் பிரிவாகவோ அமையலாம். அச்சந்தர்ப்பங்களில் முன்பின் பிரிவுகள் அமைவதில்லை. இச்சூழ்நிலைகளில் முகடுடைப் பிரிவின் நடுவளவையே முகடாகப் பயன்படுத்தலாம்.

(1) சராசரி மற்றும் நடுவன் அளவுகளிலிருந்து முகட்டளவு கணிப்பு

சராசரி மற்றும் நடுவன் என்ற இரு மையப் போக்கு அளவுகளிலிருந்தும் முகட்டளவைக் கணிக்கலாம். சமச் சீர் புடைய பரவல்களில் சராசரியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள அலை வெண்கள் ஒன்று போலிருக்கும். அதற்கான எடுத்துக்காட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(x)	(f)
0 – 5	2
5 – 10	3
10 – 15	4
15 – 20	10
20 – 25	4
25 – 30	3
30 – 35	2

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் பிரிவு இடைவெளிகள் யாவும் ஒன்று போல் சமமே. அதிக அலைவெண் கொண்ட பிரிவு 15 – 20 என்பதே. இப்பிரிவின் இரு பக்கங்களில் சம தூரத்தில் உள்ள பிரிவுகளில் உள்ள அலைவெண்கள் யாவும் சமமே. இது சமச்சீர்புடைய பரவல் என அழைக்கப்பெறும்.

இத்தகைய சமச் சீர்புடைய பரவல்களில் சராசரியும் நடு வனும் ஒரே மதிப்புடையனவாகயிருக்கும். வேறு விதமாகக் கூறி னால் சராசரியும் நடுவனும் ஒன்றை ஒன்று நெருங்கிக்கொண்டே யிருக்கும். இரண்டிற்குமுள்ள வேறுபாடு மிகமிகக் குறைவாக யிருக்கும். எனவே இவ்விரு அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட் டையே பரவலின் சமச் சீர்புத் தன்மையைச் சோதிப்பதற்குரிய ஓர் அளவையாகப் பயன்படுத்தலாம். ஆனால் முகட்டளவைப் பொறுத்தளவில் நிலைமை வேறு. சராசரிக்கும் முகட்டள விற்கும் உள்ள வேறுபாடு, சராசரிக்கும் நடுவனுக்குமுள்ள வேறுபாட்டைவிட அதிகமாக இருக்கும். சராசரிக்கும் முகட் டளவிற்குமுள்ள வேறுபாடு சராசரிக்கும் நடுவளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டோடு ஒப்பிடப்படும். சராசரிக்கும் முகட்டளவிற் கும் உள்ள வேறுபாடு சராசரிக்கும் நடுவனளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டைப் போன்று 3 மடங்குடையதாகயிருக்கும். **சரா சரி—மோட்டளவு = 3 (சராசரி — நடுவன்).** எனவே இதுவே

மோட்டளவை அறுதியிடுவதற்கான ஓர் அனுபவ விதியாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

சராசரி — முகட்டளவு = 3 (சராசரி — நடுவன்)

முகடு = 3 நடுவன் — 2 சராசரி

சராசரியின் மதிப்பு நடுவனளவைவிட அதிகமாக இருப்பதால் இரு மடங்கு சராசரியை மும்மடங்கு நடுவன் அளவிலிருந்து கழிக்கின்றோம்.

முகட்டளவுக் கணிப்பு—எடுத்துக்காட்டு

(1) சராசரி = 125

நடுவன் = 115

சராசரி — முகடு = 3 (சராசரி — நடுவன்)

125 — முகடு = 3 (125 — 115)

= 3 × 10 = 30

— முகடு = 30 — 125

முகடு = 95.

(2) 1 முகடு = 3 நடுவன் — 2 சராசரி

= (3 × 115) — (2 × 125)

= 345 — 250

= 95.

E. வரைபடத்திலிருந்து முகட்டளவு கணிப்பு

முகட்டளவை வரைபடத்திலிருந்தும் கணிக்கலாம். என்றாலும், ஒரு அடிப்படையான வேறுபாட்டைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். நடுவன், கால்ம அளவுகள், ஐந்தளவுகள், பதின்ம அளவுகள் மற்றும் நூற்றுமான அளவுகள் எல்லாம் கூட்டு அலைவெண்களிலிருந்து கணிக்கப்படுகின்றபோது முகட்டளவு மாத்திரம் அலைவெண்ணிலிருந்தே கணிக்கப்படுகிறது. இதர அளவுகள் கூட்டு அலைவெண்ணிலிருந்து கணிக்கப்படுவதால் கூட்டு அலைவெண்ணுக்குரிய வரைபடமான உச்சிக் கோட்டிலிருந்தே அவைகள் கணிக்கப்படுகின்றன. ஆனால் முகட்டளவு அலைவெண்ணிலிருந்தே நேரடியாகக் கணிக்கப்படுவதால் அலைவெண்ணுக்குரிய வரைகோட்டிலிருந்தே முகட்டளவு கணிக்கப்படுகிறது.

அலைவெண் வரைகோட்டில், X அச்சில் உறுப்புகளின் மதிப்பையும், Y அச்சில் உறுப்புகளின் அலைவெண்ணையும்

குறிப்பது மரபு. வெவ்வேறு X மதிப்புகளுக்குரிய வெவ்வேறு அலைவெண்ணுக்கான இணைக்கம்பங்களை வரைய வேண்டும். ஒவ்வொரு மதிப்புக்குரிய Y இணைக்கம்பங்களை வரைய வேண்டும். எந்த X மதிப்புக்குரிய Y இணைக் கம்பம் அதிக மாக உள்ளதோ அந்த மதிப்பு முகட்டளவாகக் கருதப்படும்.

அலைவெண் வளைகோட்டின் மிக உயர்ந்த உச்சியிலிருந்து X அச்சிற்கு ஓர் செங்குத்துக் கோடு வரைந்து X அச்சை வெட்டுமாறு செய்யலாம். செங்குத்துக்கோடு X அச்சில் வெட்டுமிடத்தைக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். இவ்வெட்டு மிடத்திற்குறிய Xன் மதிப்பே முகட்டளவாகும்.

செப்பனிடா விவரம் (1)	தொடர்பில்லாப் பரவல் (2)		தொடர் பரவல் (3)
1. விவரங்கள் ஏறுவரிசையில் மாற்றியமைக்கப் பட வேண்டும்.	விவரங்கள் ஏறுவரிசையில் மாற்றியமைக்கப் பட வேண்டும்.		1. முகட்டுடை வகுப்பின் மைய அளவு
2. வரிசையில் மிக அதிகமாக வருகின்ற மதிப்பு	மிக அதிக அலைவெண் ணுடைய மதிப்பு	(1)	$l + \frac{Cf_2}{f_1 + f_2}$
		(2)	$l + \frac{Cd_1}{d_1 + d_2}$
		(3)	சராசரி − நடுவன் =3(சராசரி−நடுவன்)
		(4)	முகடு = 3 நடுவன் — 2 சராசரி

8. பெருக்கல் சராசரி (Geometric Mean)

நாம் முன்பு கூட்டுச் சராசரி பற்றிப் படித்தோம். தற்போது பெருக்கல் சராசரி பற்றிக் காண்போம்.

கூட்டுச் சராசரி உறுப்புகளின் மொத்தக் கூட்டு மதிப்பிலிருந்து கணிக்கப்படும்போது பெருக்கல் சராசரி உறுப்புக்களின் பெருக்கல் பலன்களிலிருந்து கணிக்கப்படுகிறது. பெருக்கல்

சராசரி உறுப்புகளின் பெருக்கல் பலனை உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கைக்கேற்ற வர்க்க மூலத்தால் (Root) கணிக்கப்படுகிறது.

தொகுக்கப்படா விவரத்திற்கான பெருக்கல் சராசரி கணிப்பு

9, 16 என்ற இரு அளவுகளுக்கான பெருக்கல் சராசரி மதிப்பைக் கணிக்கலாம். உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 2.

உறுப்புகளின் மதிப்பின் பெருக்கற் பலன் $= 144$.

இங்கு இரு உறுப்புகளிலிருப்பதால், பெருக்கல் சராசரி கணிப்பதற்கு இரு வர்க்க மூலம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

$= \sqrt{144} = 12.$

எனவே, பெருக்கல் சராசரி $= 12$.

எடுத்துக்காட்டு (2)

4, 16, 8 என்ற விவரங்களுக்கான சராசரி

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= 3$

மதிப்புகளின் பெருக்கற் பலன் $= 4 \times 16 \times 8$

$= 512.$

$\therefore$ பெருக்கல் சராசரி $= \sqrt[3]{512} = 8$

பொது விதி

பொது விதியை உருவாக்கலாம். X_1, X_2, X_3, ...X_n என்று 'n' உறுப்புகள் கொண்ட கோர்வை இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{பெருக்கல் சராசரி} = \sqrt[n]{x_1, \; x_2, \; x_3 \, \ldots\ldots\ldots \, \lambda_n}$$

சுருக்கு முறை

வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருந்ததால் அவைகளின் பெருக்கற் பலன் காண்பது மிகச் சிரமமாக இருக்கும். மேலும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்

கேற்ற வர்க்க மூலம் காண்பது அதை விட சிரமம். எனவே சுருக்கு வழி தேவைப்படுகிறது. பெருக்குவதற்குரிய சுருக்கு வழியான மடக்கைகளைப் (logarithms) பயன்படுத்தலாம். எனவே பெருக்கல் சராசரியைக் கணிப்பதற்கு விசை முறைகளைப் பயன்படுத்தலாம். மடக்கை அல்லது விசையளவு முறைகளைக் கீழேயுள்ள எடுத்துக்காட்டைப் பயன்படுத்தி நினைவு கூறலாம்.

$a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$ என்பது தெரிந்ததே.

$a^3 \times a^4 \neq a^{3\times4}$

a^3, a^4 என்பவற்றைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$a^3 = a \times a \times a$

$a^4 = a \times a \times a \times a$

$a^3 \times a^4 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$

இங்கு மதிப்புகள் யாவும் *a*யின் விசையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் (*a*) என்பதற்கு 10 என்ற மதிப்பைக் கொடுப்போம்.

$a^3 = 10^3 = 10\times10\times10 = 1000.$

$a^4 = 10^4 = 10\times10\times10\times10 = 10{,}000$

$1000 \times 100{,}000 = 10^3 \times 10^4$

$= 10^{3+4} = 10^7$ என எழுதலாம்.

இங்குள்ள மடக்கை Logarithm எனப்படும்.

$\therefore Log_{10}\ 1000 \times 10{,}000 = log_{10}\ 1000 + log_{10}\ 10000$

$= 3 + 4 = 7.$

இதிலிருந்து தெரிவது என்னவெனில் இரு எண்கள் ஒரு பொதுவான அடிப்படை எண்ணின் மடக்கையளவையில் குறிக்கப்படும்போது அவ்வெண்களின் பெருக்கும் பலனின் மடக்கையளவு அவ்வெண்களின் மடக்கையளவின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகயிருக்கும். இவ்விதி இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட பல எண்களுக்கும் பொருந்தும். பெருக்குப் பலனின் விசையளவிலிருந்து பெருக்குப் பலனையே காணலாம். மடக்கையளவுதான் logarithm (அடுக்கு மூலம்) எனப்படும். எண்களுக்கான பொது அளவு, அடிப்படை எனப்படும்.

பலவெண்களுக்கான பெருக்குப் பலனைக் காண்பதற்குக் கீழ் வரும் செயல் முறைகளைப் பின்பற்றுவோம்.

(1) முதலில் பெருக்க வேண்டிய ஒவ்வொரு எண்ணிற்கும் மடக்கையளவைக் காண வேண்டும்.

2. விசையளவு கண்ட பின்னர், அவைகளைக்கூட்டி, மடக்கையளவின் கூட்டுத் தொகை காண வேண்டும்.

3. விசையளவின் கூட்டுத் தொகையின் எதிர் மடக்கை அளவு எண் காண வேண்டும். இவ்வெதிர் மடக்கை எண்ணே எண்களின் பெருக்குப் பலனாகும்.

இம்முறைகளே பெருக்கல் சராசரி கணிப்பதற்கும் பயன் படுத்தப்படும்.

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் மடக்கையளவு காண வேண்டும்.

2. பின்னர் மடக்கையளவுகளைக் கூட்டி, கூட்டுத்தொகை காண வேண்டும்.

3. பின்னர் மடக்கையளவின் கூட்டுத் தொகையைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துச் சராசரி விசையளவு காண வேண்டும்.

இச்சராசரி விசையளவே, பெருக்கல் சராசரியின் விசையளவாகும்.

4. கடைசியில் சராசரி விசையளவின் எதிர் மடக்கை காண வேண்டும். இதுவே பெருக்கல் சராசரியாகும்.

வாய்ப்பாடு

வாய்ப்பாட்டைக் கீழ் வருமாறு உருவாக்கலாம்.

'X' என்ற விவரத்திற்கு X_1, X_2, X_3........மற்றும் x_n என்ற 'n' மதிப்புகள் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். இவ்வெண்களுக்கான மடக்கையெண்கள் $\log x_1$, $\log x_2$, $\log x_3$,......$\log x_n$ என்றும் வைத்துக்கொள்வோம்.

மடக்கையெண்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \log x_1 + \log x_2 + \dots\dots\dots + \log x_n$$
$$= \Sigma \log x$$

சராசரி மடக்கையெண் $= \dfrac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots \log x_n}{n}$

$$= \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$\therefore \log \text{(G.M.)} = \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$\therefore \text{Geometric Mean} = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log x}{n}$$

கீழே கொடுத்துள்ள மதிப்புகளின் பெருக்கல் சராசரி கணிப்போம்.

1225, 148, 79, 1478, 9

$\log 1225 = 3.0881$
$\log 148 = 2.1703$
$\log 79 = 1.8976$
$\log 1478 = 3.1697$
$\log 9 = 0.9542$

11.2799

$n = 5. \therefore \text{Mean} = 11.2799/5$
$= 2.2559$ or 2.5560

Antilog of $2.2560 = 18.03 = 180.3$

$\therefore$ Geometric Mean $= 180.3$

தொடர்பற்றப் பரவலின் பெருக்கல் சராசரி கணிப்பு

கீழேயுள்ள மதிப்புகளுக்கான பெருக்கல் சராசரி கணிப்போம்.

மதிப்பு	அலைவெண்
3 x_1	2 f_1
4 x_2	3 f_2
6 x_3	1 f_3
8 x_4	4 f_4
	10

இவற்றைக் கீழ் கண்டவாறு எழுதலாம்.

3, 3, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 8.

மதிப்பு (1) (x)	மடக்கை (2)
log 3	0.4771
log 3	0.4771
log 4	0.6021
log 4	0.6021
log 4	0.6021
log 6	0.7782
log 8	0.9031
log 8	0.9031
log 8	0.9031
log 8	0.9031
	7.1511

மடக்கையெண்களின் கூட்டுத் தொகை காண்பதில் மேலும் சுருக்கு முறையைக் கையாளலாம்.

3 என்ற மதிப்பு இரு முறை வருகிறது. எனவே 3 என்ற மதிப்பின் மடக்கையெண்ணை இரண்டு தடவை எழுதிக் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக 3ன் மடக்கை எண்ணை 2 கொண்டு பெருக்கலாம். இது போன்று 4 என்ற மதிப்பின் மடக்கையெண்ணை 3 கொண்டும், 6ன் விசை எண்ணை 1 கொண்டும், 8ன் மடக்கை எண்ணை 4 கொண்டும் பெருக்கிப் பின்னர் கூட்டுத் தொகையைக் கீழ் கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.

$$2 \times \log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$$
$$3 \times \log 4 = 3 \times 0.6021 = 1.8063$$
$$1 \times \log 6 = 1 \times 0.7782 = 0.7782$$
$$4 \times \log 8 = 4 \times 0.9031 = 3.6124$$

7.1511

பின்னர் சராசரி விசைஎண் காணலாம். மொத்தம் 10 எண்கள் இருப்பதால் விசையெண்ணின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை 10 கொண்டு வகுத்துப் பெருக்கல் சராசரி காண் போம்.

$$\therefore \quad \frac{7.1511}{10} = 0.7151$$

$$\log (GM) = \text{anti } \log \text{ of } 0.7151$$

$$G.M. = 5.189$$

வாய்ப்பாட்டைக் கீழ் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\frac{2 \times \log 3 + 3 \times \log 4 + 1 \times \log 6 + 4 \times \log 8}{2 + 3 + 1 + 4}$$

இங்கு மதிப்புகளை x_1, x_2, x_3 and x_4 என்பனவற்றாலும், அலைவெண்களை f_1, f_2, f_3 மற்றும் f_4 என்ற குறியீடுகளாலும் மாற்றியமைக்கலாம். பின்னர் கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$\log (G.M.) = \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + f_3 \log x_3 + f_4 \log x_4 + f_n \log x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots \cdots f_n}$$

இங்கு மொத்த எண்கள் 'n' என்றிருந்தால் வாய்ப்பாடு கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$\log G = \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + f_3 \log x_3 + f_4 \log x_4 + \ldots + f_n \log x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots\cdots + f_n}$$

$$= \frac{\Sigma f_i \log x}{\Sigma f} \quad \therefore \text{ Geometric Mean} = \text{Anti } \log\left(\frac{\Sigma f \log x}{N}\right)$$

முன்னர் உள்ள எடுத்துக் காட்டில் விவரங்கள் கீழ் கண்ட வாறு மாற்றியமைக்கப்படலாம்.

மதிப்பு (1)	அலைவெண் (2)	log x (3)	f log x (4)
3	2	0.4771	0.9542
4	3	0.6021	1.8063
6	1	0.7782	0.7782
8	4	0.9031	3.6124
மொத்தம்	10		7.1511

சராசரி மடக்கை $\frac{7.1511}{10} = 0.7151$

பெருக்கல் சராசரியின்
மடக்கை $= 0.7151$

பெருக்கல் சராசரி $= 5.189$

C தொடர் பரவலின் பெருக்கல் சராசரி

கீழேயுள்ள தொடர் பரவலைக் காண்போம்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
0 – 10	4
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	5
40 – 50	3
மொத்தம்	30

(1) முதலில் ஒவ்வொரு பிரிவின் நடுவளவு காண வேண்டும். பின்னர் தொடர்பில்லாப் பரவலுக்கான செயல் முறைகளையே பின்பற்ற வேண்டும். பரவலைக் கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

நடுவளவு	அலைவெண்	மடக்கையெண்	மடக்கை எண் × அலைவெண்
(xi)	(f)	$\log (x)$	$f \times \log (x)$
(1)	(2)	(3)	(4)
5	4	0.6990	2.7960
15	8	1.1761	9.4088
25	10	1.3979	13.9790
35	5	1.5441	7.7205
45	3	1.6532	4.9596
மொத்தம்	30	மொத்தம்	38.8639

$$N = \Sigma f = 30.$$

$$\Sigma f.\ log\ x = 38.8639$$

$$log\ (G.M.) = \frac{\Sigma f.log\ x}{N} = \frac{38.8639}{30} = 1.2955$$

$$G.M. = \text{Antilog}\ (1.2955) = 19.74.$$

பெருக்கல் சராசரியின் பயன்கள்

(1) வேறுபாட்டின் வேக வீதத்தை அளப்பதற்கு நல்லதொரு சராசரியாகும். குறிப்பிட்ட காலவரையறையில் ஏற்பட்டுள்ள வேறுபாட்டின் நூற்றுமான வீத அளவுகள் கொடுத்துள்ள போது, சராசரி வேறுபாட்டின் நூற்றுமான வீதம் காண்பதற்குப் பெருக்கல் சராசரியையே பெரிதும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(2) மக்கட் தொகை வளர்ச்சி மற்றும் கூட்டு வட்டியில் பண முதலீடு செய்தல் போன்று கூட்டு விகிதத்தில் மாற்றம் ஏற்படும் இடங்களிலெல்லாம் பெருக்கல் சராசரியே பெரும்பான்மையும் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

1. அதிகரிப்பின் நூற்றுமான வீதம் கொடுத்துள்ள போது:

நாட்டின் மக்கட் தொகை 1941லிருந்து 1951 வரை 15 நூற்றுமான வீதம் அதிகரித்து உள்ளது. பின்னர் 1951லிருந்து 1961 வரை 20 நூற்றுமான வீதம் அதிகரித்துள்ளது. பின்னர் 1961 லிருந்து 1971 வரை 25 நூற்றுமான வீதம் அதிகரித்துள்ளது. 10 ஆண்டு காலத்தில் ஏற்பட்ட சராசரி நூற்றுமான வீத அதிகரிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஒவ்வொரு பத்தாண்டு கால ஆரம்பத்திலும் மக்கட் தொகையை 100 என வைத்துக் கொண்டு கணிக்க வேண்டும்.

(1) 1941–51 கால ஆரம்பத்தில் உள்ள மக்கட் தொகை $= 100$

முதல் பத்தாண்டு கால முடிவில் மக்கட் தொகை $= 115$

$= 100 + 15$

(2) இரண்டாவது பத்தாண்டு கால ஆரம்பத்தில் (1951 – 61)ல் மக்கட் தொகை $= 100$

இரண்டாவது பத்தாண்டு கால முடிவில் மக்கட் தொகை $= 120$

$= 100 + 20$

(3) மூன்றாவது பத்தாண்டு கால ஆரம்பத்தில் மக்கட் தொகை (1961 – 71) $= 100$

மூன்றாவது பத்தாண்டு கால முடிவில் மக்கட் தொகை $= 125$

$= 100 + 25$

ஒவ்வொரு பத்தாண்டு முடிவில் உள்ள சராசரி மக்கள் தொகையைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

$$\therefore \text{ Geometric Mean } = \text{Anti log}\left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right)$$

$$n = 3$$

$$\log x_1 = \log 115 = 2.0607$$

$$\log x_2 = \log 120 = 2.0792$$

$$\log x_3 = \log 125 = 2.0969$$

$$6.2368$$

$$\frac{\Sigma \log x}{n} = \frac{6.2368}{3}$$

$$= 2.0789$$

$$\text{Geometric Mean} = \text{Antilog } (2.0789)$$

$$= 119.9$$

பெருக்கல் வீதம் $= 119.9 - 100.0 = 19.9\%$.

தனியான விவரங்களையே கொடுத்தல்

சில வேளைகளில் விவரங்களைத் தனியாகக் கொடுப்பதுண்டு. இச்சந்தர்ப்பங்களில் தனியான விவரங்களை நூற்றுமான வீதங்களாக மாற்றிய பின்னர் முன் போல் கணிக்க வேண்டும்.

ஆண்டு	மக்கட் தொகை (பத்து இலட்சத்தில்)
1901	200
1911	225
1921	260
1931	290

இங்கு விவரங்கள் தனியாகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(1) 1901ம் ஆண்டு மக்கட் தொகை 100 ஆகயிருந்தால்

1911ம் ஆண்டு மக்கட் தொகை $= \frac{225}{200} \times 100 = 112.5$

(2) 1911ம் ஆண்டு மக்கட் தொகை 100 என்றிருந்தால் 1921ம் ஆண்டு மக்கட் தொகை

$$\frac{260}{225} \times 100 = 115{\cdot}6$$

(3) 1921ம் ஆண்டு மக்கட் தொகை 100 என்றிருந்தால் 1931ம் ஆண்டு மக்கட் தொகை

$$\frac{290}{260} \times 100 = 111{\cdot}5$$

சம்பந்தப்பட்ட விவரங்களின் நூற்றுமான அளவுகள்

112.5, 115.6 மற்றும் 111.5

= மொத்தப் பத்தாண்டு காலங்கள் = 3

$$112{\cdot}5 = \log(112{\cdot}5) = 2{\cdot}0511$$

$$115{\cdot}6 = \log(115{\cdot}6) = 2{\cdot}0630$$

$$111{\cdot}5 = \log(111{\cdot}5) = \underline{2{\cdot}0472}$$

$$6{\cdot}1613$$

$$\text{Log (G.M.)} = \frac{6{\cdot}1613}{3}$$

$$= 2.0538 = 113.2$$

மக்கட் தொகை அதிகரிப்பு = 113.2 − 100 = 13.2%

மக்கட் தொகை, கூட்டு வட்டி போன்று கூட்டு விகிதத்தில் மாற்றம் ஏற்படும் இடங்களில் எல்லாம் பெருக்கல் சராசரியையே பயன்படுத்தலாம். இவ்விடங்களில் கீழே கொடுத்துள்ள வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். இது ஒன்றும் புதியதல்ல. மாணவர்கள் ஏற்கனவே கூட்டு வட்டிபற்றிப் படித்திருப்பீர்கள். தற்போது நாம் மடக்கையளவுகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$P_n = P_0 (1 + r)^n$$

P_n = 'n' ஆண்டு முடிவில் உள்ள மதிப்பு

P_o = ஆரம்பத்தில் உள்ள மதிப்பு

r = வேறுபாட்டு வீதம்

n = மொத்த ஆண்டுகள்

P_o, P_n மற்றும் 'n' என்ற மூன்று அளவுகளும் தெரிந்தால் P_o P_n என்ற அளவுகளுக்குரிய சராசரியைக் கணிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

தமிழ் நாட்டின் மக்கட் தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சராசரி கணிக்கவும்.

1961 = 337 இலட்சம்

1971 = 411 ,,

$n = 2$

$\log 337 = 2.5276$

$\log 411 = 2.6138$

5.1414

$$\log (GM) = \frac{5.1414}{2} = 2.5707$$

$$GM = \text{anti } \log (2.5707)$$
$$= 372.$$

மக்கட் தொகைக்குப் பதிலாக ரூபாய் என்றே குறிப்பிடலாம்.

1961 = 337 ரூ. இலட்சம்

1971 = 411 ரூ. ,,

என்றாலும் முறைகளும், கடைசியில் கிடைத்த விடையும் ஒன்றாகத்தானிருக்கும்.

வாய்ப்பாடுகள்

1. தொகுக்கப்படா விவரம் $= G = \text{Antilog} \dfrac{\Sigma \log x}{n}$

2. தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவல் $= G = \text{Antilog} \dfrac{\Sigma f . \log x}{N}$

3. தொடர்புடை அலைவெண் பரவல் $= \text{Antilog} \dfrac{\Sigma f_i \log x_i}{N}$

இங்கு x_i என்று குறிப்பிட்டது எல்லாம் பிரிவுகளின் நடுவளவுகளைக் குறிப்பதாகும்.

கூட்டுச் சாரசரிக்கும் பெருக்கல் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாடு

கூட்டுச் சராசரி	பெருக்கல் சராசரி
1. மதிப்புகளில் கூட்டுத் தொகையை, விவரங்களின் எண்ணிக்கை (n) கொண்டு வகுத்தால் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கும்.	விவரங்களின் பெருக்கு பலனுக்கான (n) படி வர்க்க மூலம் பெருக்கல் சராசரியாகும்.
2. சராசரியை 'n' கொண்டு பெருக்கினால் அல்லது சராசரியின் 'n' மடங்கு தொகை மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாகும். $\sum x_i = n \times \bar{x}$	பெருக்கல் சராசரியை 'n' மடக்கையளவு மேல் உயர்த்தினால் மதிப்புகளின் பெருக்குப் பலன் கிடைக்கும்.
3. சம எண்ணிக்கை கொண்டதும் வெவ்வேறு அளவுகள் உள்ளதும் ஆனால் மொத்த உறுப்புகளின் மதிப்பு ஒன்றாகவும் உள்ள இரு பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரி ஒன்றாகவே இருக்கும்.	இங்கு பெருக்கலுக்கான அடையாளம் $(GM)^n = \pi (x_i)$ பெருக்கும் பலன் ஒன்றாகவும் சம எண்ணிக்கை கொண்டதும் வெவ்வேறு அளவுகள் உள்ள இரு பரவல்களின் பெருக்கல் சராசரி ஒன்றாக இருக்கும்.
4. ஏதாவது ஒரு உறுப்பின் மதிப்பு '0' என்றிருந்தாலும் சராசரி கணிக்க முடியும்.	ஏதாவது ஒரு உறுப்பின் மதிப்பு '0' என்றிருந்தால் பெருக்குப் பலன் '0' என்று, மாறுவதால் பெருக்கல் சராசரியும் '0' என்று மாறிவிடும்.

கூட்டுச் சராசரி	பெருக்கல் சராசரி
5. ஏதாவது ஒரு உறுப்பின் மதிப்பு எதிர் மறையாக (-) இருந்தாலும் கூட்டுச் சராசரி கணிக்கலாம்.	ஏதாவது ஒரு உறுப்பின் மதிப்பு (-) எதிர் மறையாகயிருந்தால் பெருக்குப் பலன் எதிர் மறையாகும். எனவே பெருக்கல் சராசரி கற்பனை எண்ணாகும்.

9. தலைகீழ் சராசரி அல்லது இசைச் சராசரி (Harmonic Mean)

கூட்டுச் சராசரி கொடுத்துள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் நேராக கணிக்கப்பட்ட போதிலும், தலைகீழ் சராசரி கொடுத்துள்ள விவரங்களின் தலை கீழ் மதிப்பின் அடிப்படையில் கணிக்கப்படுகிறது.

தொகுக்கப்படா விவரங்களின் தலைகீழ் சராசரி

4, 5, 6 என்ற மூன்று மதிப்புகளைக் காண்போம். இவைகளின் தலைகீழ் மதிப்புக்காண வேண்டும்.

மதிப்பு	தலைகீழ் மதிப்பு
4	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$

கொடுத்துள்ள ஒரு மதிப்பு அதன் தலைகீழ் மதிப்பு என்ற இரண்டின் பெருக்குப் பலன் எப்பொழுதும் ஒன்றாக (1) வேயிருக்கும். $\frac{1}{4}$ என்பது 4 என்ற மதிப்பின் தலைகீழ் மதிப்பு. இது போன்று 4 என்பது $\frac{1}{4}$ என்ற மதிப்பின் தலைகீழ் மதிப்பாகும். ஏனெனில் இவைகளின் பெருக்குப் பலன் 1.

2. பின்னர் இவைகளின் தலைகீழ் மதிப்புக் கண்டு அவைகளின் மொத்த மதிப்புக் காண வேண்டும்.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{30+24+20}{120}=\frac{74}{120}=\frac{37}{60}$$

3. பின்னர் இத்தலைகீழ் எண்களின் கூட்டுச் சராசரி காண வேண்டும்.

$$\text{தலைகீழ் எண்களின் சராசரி} = \frac{\text{தலைகீழ் எண்களின் மொத்த மதிப்பு}}{\text{மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{37}{60} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{37}{60 \times 3} = 37/180.$$

4. பின்னர் இக்கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழ் மதிப்புக் காண வேண்டும்.

தலைகீழ் மதிப்புகளின் சராசரி $= \frac{37}{180}$

சராசரியின் தலைகீழ் மதிப்பு $= \frac{180}{37}$

∴ தலைகீழ் சராசரி $= 4\frac{32}{37}$

தலைகீழ் சராசரியின் விளக்கம்

தலைகீழ் சராசரியைத் தற்போது விளக்கலாம். கொடுத்துள்ள விவரங்களின் தலைகீழ் மதிப்புகளின் தலைகீழ் கூட்டுச் சராசரி.

இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு

கொடுத்துள்ள மதிப்புகள்

20, 25, 30, 35, 40.

இவைகளின் தலைகீழ் மதிப்பு

$$\frac{1}{20} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{40}$$

மதிப்பு	தலைகீழ் மதிப்பு
$x_1 = 20$	$1/x_1 = 1/20$
$x_2 = 25$	$1/x_2 = 1/25$
$x_3 = 30$	$1/x_3 = 1/30$
$x_4 = 35$	$1/x_4 = 1/35$
$x_5 = 40$	$1/x_5 = 1/40$

மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $= N = 5$.

தலைகீழ் மதிப்புகளின் மொத்த மதிப்பு $= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$

$= 1/20 + 1/25 + 1/30 + 1/35 + 1/40.$

தலைகீழ் மதிப்புகளின் சராசரி $= \frac{1/20 + 1/25 + 1/30 + 1/35 + 1/40}{5}$

தலைகீழ் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{5}{1/20 + 1/25 + 1/30 + 1/35 + 1/40}$

$= \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5}$

தலைகீழ் சராசரி $= n \,/\, \Sigma\, 1/x$

$= \frac{5}{0.050 + 0.040 + 0.033 + 0.029 + 0.025}$

$= 5/0.177 = \mathbf{28.25}$

$= n \,/\, \Sigma 1/x$

தொடர்பில்லாப் பரவலின் தலைகீழ் சராசரி

முன் உள்ள எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு விவரமும் ஒரே ஒரு தடவையே வந்துள்ளது. வேறுவிதமாகக் கூறினால் ஒவ்வொரு மதிப்பின் அலைவெண் 1. எனவே முன் உள்ள எடுத்துக்காட்டில் உள்ள தலைகீழ் மதிப்பை அலைவெண் அடிப்படையில் விளக்கலாம். அலைவெண்ணை விவரத்தின் மதிப்புக் கொண்டு வகுத்துக் கிடைப்பதுவே தலைகீழ் மதிப்பு எனலாம். இவ்விளக்கமே தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவலில் பயன் படுத்தப்படுகிறது. பின்னர் விதி கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$\text{தொகுக்கப்படா விவரத்திற்கான விதி} = \frac{n}{\Sigma\, 1/x}$$

$$\text{தொடர்பில்லா பரவலின் விதி} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f/x} = \frac{N}{\Sigma f/x}$$

ஒவ்வொரு அலைவெண்ணையும் அதற்கேற்ற மதிப்பால் வகுத்துக் கிடைப்பதுவே கொடுத்துள்ள மதிப்பின் தலைகீழ் மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	தலைகீழ் மதிப்பு (f/x)
10	10	10/10 = 1.00
20	15	15/20 = 0.75
30	40	40/30 = 1.33
40	10	10/40 = 0.25
50	5	5/50 = 0.10
மொத்தம்	80	3.43

$$\text{தலைகீழ் மதிப்பின் சராசரி} = \frac{3.43}{80}$$

$$\text{தலைகீழ் சராசரி} = \frac{80}{3.43}$$

$$= 23.3$$

A, B-க்கு இடையேள்ள தூரம் 24 கி.மீ. *A*-யிலிருந்து *B*-க்கு சராசரி வேகம் மணிக்கு 4 கி.மீ.

*A*யிலிருந்து *B*க்கு செல்ல எடுத்துக் கொண்ட காலம் $= \frac{24}{4} = 6$ மணி

*B*யிலிருந்து *A*க்கு செல்ல சராசரி வேகம் $=$ 6 கி.மீ.

பிரயாண தூரம் $=$ 24 கி.மீ.

எடுத்துக் கொண்ட காலம் $= \frac{24}{6} = 4$ மணி.

பிரயாணம் செய்த மொத்த தூரம் $= 24 + 24 = 48$ கி.மீ.

பிரயாணம் செய்த மொத்த நேரம் $6 + 4 = 10$ மணி

$$\text{சராசரி வேகம்} = \frac{\text{பிரயாணம் செய்த தூரம்}}{\text{பிரயாணம் செய்த நேரம்}} = \frac{48}{10}$$

$$= 4.8 \text{ கி.மீ.}$$

முன்னர் கணித்த அளவிற்கும் (5 கி.மீ. மணிக்கு) தற்போது கணித்த அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை கவனிக்கவும். இரண்டாவது அளவின் சிறப்பை எடுத்துக் கூறத் தேவையில்லை. இவ்விரண்டு அளவுகளுக்குமுள்ள வேறுபாடு காலம், வேகம், என்ற இரு காரணிகளும் எதிர் திசையில் செல்வதால்தான் என்று கூற வேண்டும். வேகம் அதிகரிக்கின்ற போது காலம் குறையும். அல்லது வேகத்தின் அளவு குறையும் போது காலத்தின் அளவு அதிகரிக்கும். இங்கு கூட்டுச் சராசரியையோ அல்லது பெருக்கற் சராசரியையோ கையாள்வதற்குரிய வாய்ப்புகள் மிகக் குறைவு. நாம் பொதுவாக, கூட்டுச் சராசரியையே பெரும்பான்மையாகப் பயன்படுத்துகிறோம். எனவே கூட்டுச் சராசரி கணிப்பதைக் குறித்து கூர்ந்து கவனிப்போம்.

தலைகீழ் சராசரி கணிப்பதற்கான வாய்ப்பாடுகள்

1. தொகுக்கப்படா விவரத்திற்கு $= H = \frac{n}{\Sigma\, 1/x}$
2. தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவலுக்கு $= H = \frac{\Sigma f}{\Sigma f/x}$
3. தொடர்புடை அலை வெண் பரவலுக்கு $= H = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i/x_i} \quad \frac{N}{\Sigma f_i/x_i}$

இங்கு X_i என்பது பிரிவுகளின் நடுவளவைக் குறிக்கும்.

சராசரி $= \dfrac{2.10}{30}$

தலைகீழ் மதிப்பு $= \dfrac{30}{2.10} = 14.29$

விதி $= \dfrac{\Sigma f_i}{\Sigma fi/xi} = \dfrac{\Sigma N}{\Sigma f_i/x_i}$

இங்கு (x_i) என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது பிரிவின் நடு வளவு

தலைகீழ் சராசரியின் பயன்கள்

இங்கு, முதலில் கொடுத்துள்ள மதிப்பும் அவற்றின் தலைகீழ் பின்னமும், ஒன்றிற்கொன்று எதிர் விகிதத்தில் இருப்பதை நினைவு படுத்திக் கொள்ளவும். அதாவது, அவைகளின் பெருக்கற் பலன் எப்போதும் ஒன்றுக்கு (1)ச் சமமாக இருக்கும். இதிலிருந்து மாற்றங்கள் எதிர் திசையில் நடைபெறும் இடங்களில் எல்லாம் தலைகீழ் சராசரியைப் பயன்படுத்தலாம் என உணர வேண்டும். இதை மேலும் ஒரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கலாம்.

பொதுவாக நிகழும் ஒரு சம்பவத்தைக் கவனிப்போம்.

A, B என்ற இரு இடங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 24 கி.மீ. வண்டியில் செல்லும் ஒருவன் A-யிலிருந்து B-க்கு மணிக்குச் சராசரி 4 கி.மீ. வீதம் சென்று பின்னர் B-யிலிருந்து சராசரி 6 கி.மீ. வீதம் திரும்புகிறான். இப்பிரயாணத்தில் அவனது சராசரி வேகம் என்ன?

பார்த்தவுடன் எவரும் சராசரி வேகம் மணிக்கு 5 கி.மீ வீதம் என்று கூறவே முனைவர்.

$$\frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ கி.மீ.}$$

மேலும் சிறிது ஆலோசித்தால் இது சரியன்று என்பது தெளிவாகும்.

A, *B*-க்கு இடையேள்ள தூரம் 24 கி.மீ. *A*-யிலிருந்து *B*-க்கு சராசரி வேகம் மணிக்கு 4 கி.மீ.

*A*யிலிருந்து *B*க்கு செல்ல எடுத்துக் கொண்ட காலம் $= \frac{24}{4} = 6$ மணி

*B*யிலிருந்து *A*க்கு செல்ல சராசரி வேகம் $=$ 6 கி.மீ.

பிரயாண தூரம் $=$ 24 கி.மீ.

எடுத்துக் கொண்ட காலம் $= \frac{24}{6} = 4$ மணி.

பிரயாணம் செய்த மொத்த தூரம் $= 24 + 24 = 48$ கி.மீ.

பிரயாணம் செய்த மொத்த நேரம் $6 + 4 = 10$ மணி

$$\text{சராசரி வேகம்} = \frac{\text{பிரயாணம் செய்த தூரம்}}{\text{பிரயாணம் செய்த நேரம்}} = \frac{48}{10}$$

$$= 4.8 \text{ கி.மீ.}$$

முன்னர் கணித்த அளவிற்கும் (5 கி.மீ. மணிக்கு) தற்போது கணித்த அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை கவனிக்கவும். இரண்டாவது அளவின் சிறப்பை எடுத்துக் கூறத் தேவையில்லை. இவ்விரண்டு அளவுகளுக்குமுள்ள வேறுபாடு காலம், வேகம், என்ற இரு காரணிகளும் எதிர் திசையில் செல்வதால்தான் என்று கூற வேண்டும். வேகம் அதிகரிக்கின்ற போது காலம் குறையும். அல்லது வேகத்தின் அளவு குறையும் போது காலத்தின் அளவு அதிகரிக்கும். இங்கு கூட்டுச் சராசரியையோ அல்லது பெருக்கற் சராசரியையோ கையாள்வதற்குரிய வாய்ப்புகள் மிகக் குறைவு. நாம் பொதுவாக, கூட்டுச் சராசரியையே பெரும்பான்மையாகப் பயன்படுத்துகிறோம். எனவே கூட்டுச் சராசரி கணிப்பதைக் குறித்து கூர்ந்து கவனிப்போம்.

தலைகீழ் சராசரி கணிப்பதற்கான வாய்ப்பாடுகள்

1. தொகுக்கப்படா விவரத்திற்கு $= H = \frac{n}{\Sigma 1/x}$
2. தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவலுக்கு $= H = \frac{\Sigma f}{\Sigma f/x}$
3. தொடர்புடை அலை வெண் பரவலுக்கு $= H = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i/x_i} \quad \frac{N}{\Sigma f_i/x_i}$

இங்கு X_i என்பது பிரிவுகளின் நடுவளவைக் குறிக்கும்.

கூட்டுச் சராசரி, பெருக்கல் சராசரி மற்றும் தலைகீழ் சராசரி களிடையேயுள்ள தொடர்பு

கொடுத்துள்ள சில விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி பெருக்கற் சராசரிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ, மற்றும் பெருக்கற் சராசரி தலைகீழ் சராசரிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருக்கும்.

எனவே Arithmetic Mean ≥ Gecmetric Mean ≥ Harmonic Mean என்ற பண்பு நிலை உருவாகும்.

மாணவர்கள் மேலே கூறிய பண்புகளைப் பற்றி அல்ஜிப்ராவில் கோவைகளைப் (Progression) பற்றி படிக்கும் பொழுது படித்திருக்கலாம்.

எடைகொள் சராசரி (Weighted Average) (நிறையிட்ட சராசரி)

கூட்டுச் சராசரி, பெருக்கல் சராசரி மற்றும் தலைகீழ் சராசரி என்பவற்றைப் பற்றி படித்த பொழுது ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று மாதிரிகளைப் பற்றி கவனித்தோம்.

1. சீர் செய்யா விவரம்
2. தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவல்
3. தொடர்புடை அலைவெண் பரவல்

இந்த மூன்றையும் இரு விதமாகப் பிரிக்கலாம்.

1. பகுக்கப்படா விவரங்கள்
2. அலைவெண் விவரங்கள்

தொகுக்கப்படா விவரத்தில் ஒரு மதிப்பு ஒரே ஒரு தடவையே பின் பற்றப்படும். வேறுவிதமாகக் கூறின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்குரிய அலைவெண் ஒன்று அல்லது ஒன்று போன்றது.

எல்லா விவரங்களிலும் அலைவெண் ஒரே மாதிரி அல்லது ஒன்று போன்றது என்று கூறினால் ஒவ்வொன்றின் அலைவெண் ஒன்று (1) என்று பொருள் அன்று. அலைவெண் ஒன்றாகவோ அல்லது அதற்கு மேம்பட்டோ இருக்கலாம். எவ்வாறாயினும், எல்லா மதிப்பிற்குரிய அலைவெண்ணும் சமமாக இருக்கும் என்று பொருள்படும்.

எளிய சராசரி (Simple Average)

அலைவெண் தொடர்பின்றி கணிக்கப்படும் எல்லா சரா சரிகளும் (கூட்டு, பெருக்கல், தலைகீழ்) எளிய சராசரியையே குறிப்பதாகும்.

நிறையிட்ட சராசரி (Weighted Average)

எப்பொழுதாவது கூட்டு, பெருக்கல், தலை கீழ் சராசரிகள் அலைவெண்களின் அடிப்படையில் கணிக்கப்படுமானால் அவை நிறையிட்ட சராசரி எனப்படும். இங்கு அலைவெண்கள் எடை களாகப் பயன்படும். இதர இடங்களில், உதாரணமாக மாவட் டத்தில் சராசரி மகசூலைக் கணிக்கும் பொழுது ஒவ்வொரு தாலுக்காவிலும் குறிப்பிட்ட பயிரின் பரப்பு, எடை அளவாக பயன்படும். என்றாலும், எல்லாவற்றிற்குமான அலைவெண் சமமாகவோ அல்லது ஒன்று போல் இருந்தால் எளிய சரா சரியும் நிறையிட்ட சராசரியும் ஒன்றாகவே இருக்கும். அதை மேலும் கவனிப்போம்.

மதிப்பு x	அலைவெண் f	பெருக்குத்தொகை (xf)
10	5	50
30	5	150
40	5	200
50	5	250
130	20	650

$$\text{சராசரி} = \frac{\Sigma\, x.f}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f x}{fi} = \frac{650}{20} = 32.5$$

முதல் நிரையில் உள்ள மதிப்புகளின் மொத்தம் $\doteq$ 130

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 4

$$\text{எனவே சராசரி} = \frac{130}{4} = 32.5$$

இரு வழிகளிலும் கணித்துக் கிடைத்த சராசரி ஒன்றாகவே உள்ளது.

$$\text{நிறையிட்ட சராசரி} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{(10\times 5)+(30\times 5)+(40\times 5)+(50\times 5)}{(5) + (5) + (5) + (5)}$$

இங்கு வளைவுகளின் வெளியே 5ஐ எடுத்து விட்டால் பகுதியும் தொகுதியும் கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$= \frac{5\ (10 + 30 + 40 + 50)}{5\ \ (1 + 1 + 1 + 1)}$$

$$= \frac{10 + 30 + 40 + 50}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{130}{4} = \frac{\Sigma x}{n} = 32.5$$

எனவே தொடர்பில்லா, தொடர்புடைப் பரவல்களில் நாம் படித்தது யாவும் நிறையிட்ட சராசரியே.

தொகுக்கப்படா விவரத்தில் கருதியது எளிய சராசரியே.

மையப் போக்கு அளவுகளில் உள்ள நிறைகள்

சராசரிகள்

இவைகளுக்குத் தெளிவான வாய்ப்பாடுகள் உண்டு. அல்ஜிப்ராவினுடைய செயல்முறைகளுக்கு வளைந்து கொடுப்பவை.

கூட்டுச் சராசரி இலகுவாக கணிக்கப்படும் பொழுது பெருக்கல், தலைகீழ் சராசரிகள் கணிக்கப்படுவதில் சில சிரமங்கள் உண்டு. கூட்டுச் சராசரியை எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் போது, பெருக்கல், தலைகீழ் சராசரியை எளிதில் புரிந்து கொள்வதற்குச் சிந்தனை தேவை. இவ் அளவுகள் வரைபடங்களிலிருந்து கணிக்க முடியாது. இவ் அளவுகள் யாவும் பரவல்களின் மூல அளவிலேயே கொடுக்கப்படும். இவ் அளவுகள் மிகக் குறைந்த அல்லது மிகக் கூடிய அளவுகளால் மிகவும் பாதிக்கப் படும். இவைகள், பொருள்களின் இட அளவுகளால் பாதிக்கப் படுவதில்லை. எனவே இவ் அளவுகளைக் கணிப்பதற்கு விவரங்களை ஏறு வரிசையிலோ அல்லது இறங்கு வரிசையிலோ மாற்றியமைக்கத் தேவையில்லை. கூட்டு அலைவெண்ணும் பயன்படுவதில்லை.

நடுவன், கால்ம அளவு, ஐந்தளவு, பதின்ம அளவு, நூற்றமான அளவு

இவைகளுக்குத் தெளிவான வாய்ப்பாடுகள் உண்டு. ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புண்டு.

$$M = Q_2 = D_5 = P_{50}.$$

$$Q_1 = P_{25} \; ; \; Q_3 = P_{75}$$

இவைகள் எளிதில் புரிந்து கொள்ளப்படும். இவைகள் வரை படத்திலிருந்தோ அல்லது கூட்டு அலைவெண்ணிலிருந்தோ கணிக்கப்படும். கூட்டு அலைவெண் பயன்படுத்தப்படும். இவை பொருள்களின் மதிப்பால் மாற்றமடைவதில்லை. எனவே மிக கூடுதல், குறைந்த அளவுகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. அவைகள் இடநிலைகளால் பாதிக்கப்படும். எனவே அவைகள் ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டும். பரவலிலுள்ள மூல விவரங்கள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்படுகின்றனவோ அதே அளவையில் இவைகளும் கொடுக்கப்படும். அவைகளுக்குச் சராசரியோடு நேரடித் தொடர்பு இல்லை. என்றாலும், சமச்சீர் பரவல்களில் சராசரியும் நடுவனும் ஒன்று போலிருக்கும்.

முகட்டளவு (Mode)

இதற்கென்று கணிப்பதற்குத் தனி வாய்ப்பாடுகள் உண்டு. எனினும் அவைகள் குறைவற்றவை அன்று. இவ் அளவும் உறுப்புகளின் மதிப்பால் மாற்றமடைவதில்லை. ஆனால் மதிப்புகளின் இடநிலைகளால் மாற்றமடைவதுண்டு. கூடுதல் மற்றும் குறைந்த அளவுகளால் பாதிப்பு ஏற்படுவதில்லை. அலைவெண் பரவலிலிருந்து இதைக் கணிக்கலாம். பரவலின் மூல விவரங்கள் எந்த அளவில் கொடுக்கப்பட்டனவோ அவ் அளவுகளிலேயே இந்த அளவும் கொடுக்கப்படும். புது விவரங்களின் விளைவால் இடநிலைகளே மாறுபடும். ஒரே பரவலுக்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட முகட்டளவுகளும் உண்டு. பரவல்கள் ஒரு முகடுடையதாகவோ அல்லது இரு முகடுடையதாகவோ இருக்கும். விவரங்கள் ஏறு வரிசையில் மாற்றி அமைக்கப்பட வேண்டிய தேவை எழும். இதை வரைபடத்திலிருந்தும் கணிக்கலாம். இது சராசரியோடும் நடுவனளவோடும் தொடர்புடையது. வேறு விதமாகக் கூறினால், கீழேயுள்ள விதி முறைகளைப் பயன்படுத்தி கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தும் நடுவனளவிலிருந்தும், இதைக் கணிக்கலாம்.

1. சராசரி — முகடு = 3 (சராசரி — நடுவன்)

2. 1 முகடு = 3 நடுவன் — 2 சராசரி

பயிற்சி

1. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, நடுவன், முகடு, கால்ம அளவுகளைக் காண்க.

x	f_i
0 — 10	3
10 — 20	5
20 — 30	7
30 — 40	8
40 — 50	2
	25

2. கீழேயுள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் குழுவின் சராசரி காண்க.

	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	சராசரி எடை
குழு A	28	45
குழு B	42	43

3. கீழேயுள்ள பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, நடுவன் அளவு காண்க.

x	f
10	2
15	21
20	25
25	17
30	5

4. கீழேயுள்ள பரவலின் பல்வேறு மையப் போக்களவுகளைக் காண்க.

10, 12, 15, 29, 40, 12, 13, 15, 16, 17.

5. கீழேயுள்ள பரவல்களின் பெருக்கல் சராசரிகளைக் காண்க.

(a)	(b)	(c)
10	120	1200
15	280	2800
18	320	3200
20	420	4200
25	550	5500

6. கீழேயுள்ள பரவல்களுக்குப் பெருக்கல் சராசரி காண்க.

(1) x	f	(2) x	f
10	4	120	4
15	3	150	3
18	5	180	5
20	6	290	3
25	2	350	5

(7) கீழேயுள்ள பரவல்களின் தலைகீழ் சராசரி அல்லது இசைச் சராசரி (H.M.) காண்க.

10	120
15	150
20	180
25	200
30	250

(8) கீழேயுள்ள பரவல்களின் தலைகீழ் சராசரி காண்க.

(1) x	f	(2) x	f
10	3	150	3
15	4	180	4
18	3	200	2
20	2	225	3
25	1	250	3

(9) கீழேயுள்ள பரவலின் P_7, P_{25} அளவுகளைக் காண்க.

x	f
0 – 10	5
10 – 20	8
20 – 30	9
30 – 40	12
40 – 50	7
50 – 60	9

அத்தியாயம் II

சிதறலளவுகள்

(Measures of Dispersion)

ஒரு கோர்வையில் உள்ள விவரங்கள் யாவும் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுகளைச் சுற்றியே செல்லும், அல்லது, இயங்கும் போக்குடையவையாக இருக்கும் என்றும், அத்தகைய குறிப்பிட்ட அளவுகள் குவி நிலையளவுகள் அல்லது மையக் போக்கு அளவுகள் என்றும் முன் அதிகாரத்தில் படித்தோம். மேலும் பல வகையான மையப் போக்கு அளவுகளைப்பற்றியும் படித்தோம். பல பரவல்களை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கு இத்தகைய பல்வேறு மைய நோக்கு அளவுகள் பயன்படும். முன் அதிகாரத்தில் பார்த்த மையப் போக்கு அளவுகளுக்கு நேர் எதிரான அளவுகள் பற்றி தற்போது படிப்போம். இத்தகைய புதிய அளவுகள், வேறுபாட்டை அல்லது விலக்கத்தைத் தெரிவிப்பதாகயிருக்கும். எனவே இத்தகைய அளவுகள் சிதறலளவுகள் என்றழைக்கப்படும்.

மேலும் விரிவாகப் படிப்பதற்கு முன்னால், அழுகு பொருள் வியாபாரத்திலுள்ள 3 நபர்களின் வியாபாரம் குறித்துக் காண்போம். அவர்களின் வியாபாரத்தை விற்பனைக் கோணத்திலிருந்து ஆய்ந்து, வியாபாரத்தைத் தொடர்ந்து நடத்துவது பயனளிக்குமா என்று பார்ப்போம்.

	வியாபாரி *A* ரூ.	வியாபாரி *B* ரூ.	வியாபாரி *C* ரூ.
திங்கள்	40	35	40
செவ்வாய்	75	50	40
புதன்	25	45	40
வியாழன்	80	40	40
வெள்ளி	50	30	40
சனி	30	40	40
மொத்தம்	300	240	240

சராசரி விற்பனை $A \quad \frac{300}{6} = 50$ ரூ.

$B \quad \frac{240}{6} = 40$ ரூ.

$C \quad \frac{240}{6} = 40$ ரூ.

'A' யின் வியாபாரத்திற்குரிய மொத்த விற்பனை ரூ. 300. B மற்றும் C என்ற ஒவ்வொருவரின் மொத்த விற்பனை ரூ.240. எனவே, மொத்த விற்பனையைக் கவனிக்கும் போது Aயின் வியாபாரம் மற்ற இருவர்களின் வியாபாரத்தை விடச் சிறந்தது எனத் தெரிகிறது. மொத்த விற்பனையைக் கவனியாது, ஒரு நாளின் சராசரி விற்பனையிலிருந்தும் நாம் இதே முடிவிற்கு வரலாம். Aயின் சராசரி விற்பனை ரூ. 50. ஆனால் B, C என்ற இருவரின் சராசரி விற்பனை ரூ. 40. எனவே A யின் வியாபாரம் B, C யின் வியாபாரத்தை விடச் சிறந்ததே. நுட்பமில்லாத ஒருவர் இந்த முடிவிற்குத்தான் வர முடியும்.

ஒவ்வொரு நாளின் வியாபாரத்தின் நிலைமை பற்றி இனி ஆய்வோம். Aயைப் பொறுத்தளவில் வியாபாரம் ரூ. 30 லிருந்து ரூ. 80 வரைச் செல்லுகிறது. ஆனால் B யைப் பொறுத்தளவில் இது ரூ. 30லிருந்து ரூ. 50 வரை செல்லுகிறது. ஆனால் Cயைப் பொறுத்தளவில் எந்தவிதமான வேறுபாடுமின்றி ஒரே சீராக உள்ளது. Bயின் வேறுபாடு Aயின் வேறுபாட்டைப் போல் அவ்வளவு அதிகமாகவில்லை. கூடுதல் குறைந்த அளவுகளின் வேறுபாடு Aயைப் பொறுத்தளவில் (80 – 30) ரூ. 50. இந்த வேறுபாடு சராசரி வியாபாரத்திற்குச் சமமாக உள்ளது. Bயைப் பொறுத்தளவில் கூடுதல், குறைந்த அளவுகளின் வேறுபாடு ரூ. 20 (50 – 30). இது உண்மையில் சராசரி விற்பனையின் 50 சதவீதமாக உள்ளது. Cயைப் பொறுத்தளவில் இந்த வேறுபாடு 0. எனவே Bயின் வியாபாரம் Aயின் வியாபாரத்தைவிடச் சீராக உள்ளது என்று கூறலாம். Cயைப் பொறுத்தளவில் வியாபாரம் ஒரே சீராக உள்ளது. Aயின் வியாபாரம் செவ்வாய் கிழமையன்று ரூ. 75 வரை செல்லுகின்றது. இதே உயர்ந்த அளவு விற்பனையை அடுத்த நாளும் எதிர் பார்த்து அதிக அளவில் சரக்குகளை அடுத்த நாளுக்காக முன்னால் வாங்கி வைத்தால், அவன் பெரிய இழப்பையடைய வேண்டும். ஏனெனில் அடுத்த நாள் விற்பனை

ரூ. 25 ஆகக் குறைந்து விடுகிறது. எனவே விற்பனையாகாத பொருள் அதிக அளவு தேங்கி விடும். விற்பனை அடுத்த நாள் குறைந்துவிடும் என்று அஞ்சி பொருள்களை அதிக மாக வாங்காதிருந்தாலோ, விற்பனைக்குப் போதுமான கையிருப்பில்லாததாகி விடும். எனவே வியாபாரத்தை இழக்க நேரிடும். எனவே வியாபாரத்தில் நிகழும் இத்தகைய விபரீத விளையாட்டு நல்ல அறிகுறியன்று. சராசரி விற்பனை யைப் பொறுத்த அளவில் Aயின் விற்பனை சிறந்ததென்று கூறினும், வேறுபாட்டை நோக்கும் போது Cயின் வியாபாரமே சிறந்தது.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, வியாபாரத்தின் சிறப் பை மொத்த விற்பனை அல்லது சராசரி விற்பனையிலிருந்து முடிவு செய்யாது, ஒவ்வொரு நாளும் நடைபெறும் விற்பனை வேறு பாட்டையும் கவனித்தே முடிவு செய்ய வேண்டும் என்று தெரி கிறது. விவரங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட மைய அளவுகளை நோக் கியே செல்லும் போக்குடையவையாகயிருக்கும் என்று கூறியது போன்று, விவரங்கள் மைய அளவுகளிலிருந்து பிரிந்து செல்லும் அல்லது வேறுபடும் தன்மை உடையவையாகயிருக்கும் என்றும் கூறலாம். மையக் போக்கு அளவுகளைப் போன்று, சிதறலளவு களையும் அல்லது விலக்கல் அளவுகளையும் நாம் காணலாம்.

பலவித சிதறலவுகள் உள. அவை (1) வீச்சு (2) சரா சரி வேறுபாடு அல்லது சராசரி விலகல் (3) மூல வேறுபாடு அல்லது மூல விலக்கம் (4) விலக்க வர்க்கம் (5) வேறுபாட்டுக் கெழுவெண் (6) இரு கால்ம அளவு தம்மிடையே உள்ள பாதி.

I. வீச்சு (Range)

சிதறலளவுகளில் கணிப்பிற்கு எளியது வீச்சாகும். மிகக் கூடுதல், மிகக் குறைந்த அளவுகளின் வேறுபாடு வீச்சு என விளக்கப்படும். பரவலில் உள்ள அளவுகள் எந்த மூல அளவில் கொடுக்கப்படுகின்றதோ அதே அளவில் தான் வீச்சும் கொடுக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

தொழிற் சாலையில் உள்ள தொழிலாளர்களின் எடை—

50, 60, 52, 45, 49, 35, 42, 40 (கி.கி)

உயர்ந்த எடை 60 கி.கி.

குறைந்த எடை 35 கி.கி.

வீச்சு $60 - 35 = 25$ கி.கி.

எடுத்துக்காட்டு

மனிதர்களின் எடை பவுண்டில் கொடுக்கப்பட்ட வேறு ஒரு கோர்வையைப் பார்ப்போம்.

120, 130, 125, 160, 142, 115, 140,

உயர்ந்த எடை 160 ப.

குறைந்த எடை 115 ப.

வீச்சு 160 − 115 = 45 ப.

மேலே உள்ள முதல் எடுத்துக்காட்டில் வீச்சின் அளவு 25 கி.கி. அடுத்ததில் 45 பவுண்டு. பரவலில் உள்ள உறுப்புகளின் அளவுகள் வெவ்வேறு அளவையில் கொடுக்கப்படும்போது பரவல்களை வீச்சுகளின் அடிப்படையில் ஒப்பிடுவது சிரமமானதாகும். அளவைகளின் உதவியின்றி வெறும் எண்ணிக்கையை வைத்துக் கூறுவதானால் வீச்சு 45 என்ற இரண்டாவது கோர்வை 25 வீச்சுளவுள்ள முதல் கோர்வையை விட அதிக அளவுடையது என்று கூறலாம். மையக் போக்கு அளவைப் பொறுத்தளவில் மையப் போக்கு அளவுகளின் மதிப்புக் கூடுந்தோறும் பரவலின் மதிப்பும் கூடும். ஆனால் சிதறலவுகளைப் பொறுத்தளவில் மதிப்புகள் குறையுந்தோறும் பரவலின் மதிப்பு அதிகமாகும்.

சிறந்த ஒப்பீடு வேண்டுமெனில் பரவல்கள் யாவும் ஒரே அளவையில் அமைந்திருக்க வேண்டும். கீழே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

	நாடு	சராசரி ஊதியம்	வீச்சு
1.	இங்கிலாந்து	300 பவுண்டு	75 பவுண்டு
2.	ஜெர்மனி	500 மார்க்	45 மார்க்
3.	ஜப்பான்	450 யென்	50 யென்
4.	ருஷ்யா	350 ரூபில்ஸ்	35 ரூபில்ஸ்
5.	அமெரிக்கா	700 டாலர்	100 டாலர்
6.	இந்தியா	400 ரூபாய்	80 ரூபாய்

இங்கிலாந்து, ஜெர்மனி, ஜப்பான், ரஷ்யா, அமெரிக்கா மற்றும் இந்தியா போன்ற நாடுகளில் உள்ள தொழிலாளர்களின் ஊதியம் பற்றிப் படிப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். இந்நாட்டுத் தொழிலாளர்களின் ஊதியம் அந்தந்தநாட்டு நாணயத்தில்தான் மேற்கண்டவாறு கொடுக்கப்படும். அந்நாட்டுத் தொழிலாளர் களின் சராசரி ஊதியமும், வீச்சும் மேற் கண்டவாறு உள்ளன என வைத்துக் கொள்வோம்.

ஒப்பீடு சற்று சிரமமானதே. காரணம், பல்வேறு அளவைகள் இருப்பதால்தான். ஒப்பீட்டிற்காக அளவைகளை மாற்ற முடியாது. எனவே அளவைகளினால் உள்ள சிரமத்தைத் தவிர்ப்பதற்காக வேறு முறைகளைக் கையாள வேண்டும். எனவே ஒப்பளவுகளைக் (Relative measures) கருதவேண்டும்.

சிதறல் கெழு அல்லது சிதறல் துணை அளவு (Co-efficient of Dispersion)

வீச்சுக்கெழு அல்லது வீச்சுத் துணையெண் (Co-efficient of Range)

ஒப்பளவுகள் எப்போதும் எந்த அளவையிலும் கொடுக்கப்படுவதில்லை. அது ஒரு தனி எண்ணிக்கையி லேயே இருக்கும். இங்கு தொடர்பளவு, சிதறல் துணையெண் என்று அழைக்கப்படும். அது கீழ் வருமாறு விளக்கப்படும்.

$$\text{சிதறல் கெழு} = \frac{\text{கூடுதல் குறைந்த அளவுகளின் வித்தியாசம்}}{\text{கூடுதல் குறைந்த அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை}}$$

பெரிய அளவு 'L' என்றும் குறைந்த அளவு 'S' என்றும் குறிப்பிட்டால் வாய்பாட்டைக் கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\text{சிதறல் அளவு துணை எண்} = \frac{L - S}{L + S}$$

முன்பு படித்த இரண்டு எடுத்துக் காட்டுகளில் சிதறல் கெழு காண்போம்.

	எடுத்துக்காட்டு 1	எடுத்துக்காட்டு 2
பெரிய அளவு	60	160
சிறிய அளவு	35	115
மொத்தம்	95	275
வித்தியாசம்	25	45

சிதறல் கெழு $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{60-35}{60+35} \quad \frac{160-115}{160+115}$

$= \frac{25}{95} \quad \frac{45}{275}$

$= 0.26 \quad 0.15$

இரண்டாவது எடுத்துக் காட்டு மிகக் குறைந்த மதிப்புடைய சிதறல் கெழு எண் கொண்டது. எனவே இதுவே சிறந்தது.

1. துண்ண சிதறல் அளவு கண்டு பிடிக்கவும்.

30, 45, 50, 70, 75.

பெரிய அளவு $L = 75$

சிறிய அளவு $S = 30$

துணை சிதறல் அளவு $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{75-30}{75+30}$

$= \frac{45}{105} = \mathbf{0.43}$

2. வீச்சின் துணை சிதறல் அளவு அல்லது வீச்சுக்கெழு கீழ் வரும் பரவலுக்குக் கண்டு பிடிக்கவும்

எடை 10 கிலோ	மாணவர் எண்ணிக்கை
40 – 50	4
50 – 60	2
60 – 70	5
70 – 80	2
80 – 90	1

பெரிய அளவு $L = 90$

சிறிய அளவு $S = 40$

வீச்சு $= L - S$. துணைவீச்சு $= 90 - 40 = 50$ கி.கி.

$$\text{வீச்சின் கெழு} = \frac{L - S}{L + S}$$

$$= \frac{90 - 40}{90 + 40}$$

$$= \frac{50}{130} = 0.38$$

வீச்சு அளவின் நிறைகளும், குறைகளும்

வீச்சு, கணிப்பதற்கும் கருத்தில் பதிய வைப்பதற்கும் எளிதானது. எனினும் இதற்குரிய குறைகள் உண்டு. இது மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புகளின் வேறுபாட்டைக் குறிக்கும். எனவே, நாம் மிகப் பெரியதும், மிகச்சிறியதுமான இரு அளவுகளை மாத்திரமே கருதி அவற்றின் அடிப்படையில் பரவலில் உள்ள இதர உறுப்புகளின் மதிப்புகளை மதிப்பீடு செய்கின்றோம். ஆனால் பரவலில் பல உறுப்புகள் இருக்க

லாம். எனவே இரு உறுப்புகளின் அடிப்படையில் பல உறுப்பு களைப் பற்றிய கருத்துக்களை வெளியிடுவது அவ்வளவு பொருத் தமானதன்று. நாம் எந்தக் கருத்தை வெளிப்படுத்தினும் அது பரவல்களில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் அடிப்படையில் அறுதி யிட்ட கருத்தாக இருக்க வேண்டுமே ஒழிய, இரு உறுப்புகளை மாத்திரம் பொறுத்ததாக இருக்கக் கூடாது. இம்முறை எளியதே ஆயினும், குறைகள் இல்லாமல் இல்லை.

குறைகள்

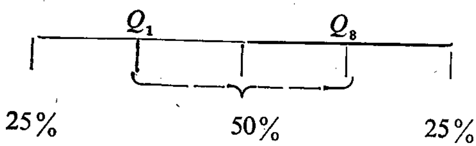
சில சமயங்களில் குறைந்த, கூடிய அளவுகள் இருப்பது அபூர்வமாகும். மிகக் குறைந்த அல்லது மிகக் கூடிய ஏதாவது ஒரு மதிப்பின் காரணமாக வீச்சு பெரிய அளவில் பாதிக்கப்படும். இது எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்பையும் பிரதிபலிப்பதாகாது.

எனவே பரவலில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் பிரதி பலிப்பதாகவும், எல்லா உறுப்புகளின் மதிப்புகளின் அடிப்படை யில் பொதுவாக எல்லோருக்கும் விளங்கும் நிலையில் உள்ள வேறொரு அளவை நாம் கருத வேண்டியதாக உள்ளது.

1. கால்ம அளவு விலக்கம் (Q) அல்லது கால்ம விலக்கம் (Quartile Deviation)

முன் அத்தியாயத்தில் மையப் போக்கு அளவுகளைப் பற்றிப் படிக்கும் போது, Q_1 என்ற கீழ் கால்ம அளவைப் பற்றியும் Q_3 என்ற மேல் கால்ம அளவைப் பற்றியும் படித்தோம். Q_3 என்பது பரவலை இரு பாகங்களாக பிரிக்கும் போது, 25 சதவீதத்தினர் மதிப்பு Q_3 ஐவிட அதிகமாகவும், மீதியுள்ள 75 சதவிகிதத்தினர் மதிப்பு Q_3 ஐவிட குறைவாகவும் இருக்கும். Q_1 இதற்கு நேர் எதிரானது. 25 சதவிகிதத்தினர் மதிப்பு Q_1ஐ விடக் குறைவாகவும் 75 சதவீதத்தினர் மதிப்பு Q_1 விட அதிகமாக வும் இருக்குமாறு பரவலை இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கும். இதை மேலும் விளக்கலாம். Q_3 ஐப் பொறுத்த அளவில் 25 சதவிகிதத்தினர் அளவு Q_3 ஐ விட அதிகமாக இருக்கும். ஆனால் Q_1 ஐப் பொறுத்தளவில் 25 சதவிகிதத்தினர் அளவு Q_1ஐ விட குறைவாக இருக்கும். எனவே, $Q_3 - Q_1$ என்ற இடைவெளியில் 50 சதவிகிதத்தினர் இருப்பர். இவ்விடைவெளி இரு கால்ம இடைவெளி எனப்படும். இவ் அளவு, இரண்டால் வகுக்கப்பட்டால் கால்ம அளவு விலக்கம்

கிடைக்கும். இது இரு கால்ம அளவின் இடைவெளியின் பாதி யாக இருக்கும்.



எனவே இரு கால்ம அளவு தம் இடைவெளி பாதியை ஒரு விலக்க அளவாகக் கருதலாம்.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

இங்கு Q என்ற 'கால்ம விலக்கம்' பரவலில் அளவுகள் எந்த அளவையில் கொடுக்கப்பட்டனவோ அதே அளவையில் கொடுக்கப்படும். எனவே, வெவ்வேறு அளவைகளில் அமைந்த ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல பரவல்களை ஒப்பிடுவது சிரமமாகும். எனவே அளவைகளின் சிரமத்திலிருந்து விடுபட வேறுஅளவு களைக் கருத வேண்டியுள்ளது. இதற்கு, மேல் கால்ம அளவு, கீழ் கால்ம அளவுகளின் வித்தியாசத்தையும், கூட்டுத் தொகை யையும், கையாளலாம்.

கால்ம விலக்கத் துணை—கால்ம விலக்கக் கெழு (Co-efficient of Quartile Deviation)

$$\frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 - Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

முன் அதிகாரத்தில் மேல், கீழ் கால்ம அளவுகளைக் கணிப்பது பற்றி விரிவாகக் கண்டோம். எனவே இங்கு கால்ம அளவு களிலிருந்து விலக்கக்கெழு அளவு கணிப்பது பற்றி காண்போம்.

கால்ம விலக்கத்தையும், கால்ம சிதறல் கெழு அளவையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

1. கால்ம விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{75 - 45}{2} = \frac{30}{2}$

$= 15$ kg.

2. கால்மசிதறல் கெழு $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{75 - 45}{75 + 45}$$

$$= \frac{30}{120} = 0.25$$

கால்மச் சிதறல் கெழு அளவுகளில் அளவை குறிப்பதில்லை. அவைகள் யாவும் எண்ணிக்கையிலேயே கொடுக்கப்படும். எனவே, ஒப்பிட எளிதாகும். கால்ம அளவுகள் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், கணிப்பு எளிதாக இருக்கும். ஆனால் பரவல் களிலிருந்து கால்ம அளவைக் கணித்துப் பின்னர் துணைக் கால்ம விலக்கங்களைக் கணிப்பதாக இருந்தால் மிகச் சிரமமாக இருக்கும். இது உறுப்புகளின் நிலையைப் பொறுத்து அமைந்ததேயொழிய மதிப்பைப் பொறுத்து அமைந்ததல்ல.

3. சராசரி விலக்கம்
(Mean Deviation)

வீச்சைப் பற்றி படிக்கும் போது, பெரிய, சிறிய அளவுகள் என்ற இரண்டே மதிப்புகளின் அடிப்படையில் கணிக்கப்படுவ தாகக் கண்டோம். மேலும், 'கால்ம விலக்க அளவு' உறுப்பு களின் இட நிலையால் பாதிக்கப்படுமேயல்லாது மதிப்பால் பாதிக்கப்படாது என்றும் கண்டோம். தற்போது எல்லா உறுப்பினர்களின் மதிப்பால் பாதிக்கப் படக்கூடிய அளவுகளைக் காண்போம். அவைகளில் ஒன்று சராசரி விலக்கமாகும்.

சராசரி விலக்கம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரக் கோர்வையின் சராசரி முதலில் காண வேண்டும் ($\bar{x}$). பின்னர் ஒவ்வொரு மதிப் பிற்கும் சராசரிக்கு முள்ள வேறுபாட்டை அல்லது வித்தியாசத் தைக் காண வேண்டும் (d). பின்னர் இவ்வாறு கிடைத்த எல்லா வேறுபாடுகளையும் கூட்ட வேண்டும் ($\sum d$). பின்னர் வேறு பாட்டின் கூட்டுத் தொகையை உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை யால் வகுத்துச் சராசரி வேறுபாட்டைக் கணிக்க வேண்டும்

$\frac{\Sigma d}{n}$. இதுவே சராசரி விலக்கம் எனப்படும். கீழேயுள்ள எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம்.

	பிரிவு 1 (விற்பனை) ரூ.	பிரிவு 2 (விற்பனை) ரூ.
திங்கள்	40	35
செவ்வாய்	75	50
புதன்	25	45
வியாழன்	80	40
வெள்ளி	50	30
சனி	30	40
மொத்தம்	300	240

சராசரி வேறுபாடு $= \frac{300}{6} =$ ரூ. 50 $\qquad \frac{240}{6} =$ ரூ. 40

இரண்டு கடைகளுக்கு தினசரி விற்பனை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இரு கடைகளின் நாளொன்றுக்குச் சராசரி விற்பனை முறையே 50 ரூபாய் மற்றும் 40 ரூபாய். ஒவ்வொரு நாள் விற்பனைக்கும் சராசரிக்குமுள்ள வித்தியாசத்தைக் கணிப்போம்.

	பிரிவு 1	பிரிவு 2
திங்கள்	40–50 = –10	35 – 40 = –5
செவ்வாய்	75–50 = 25	50–40 = 10
புதன்	25–50 = –25	45–40 = 5
வியாழன்	80–50 = 30	40–40 = 0
வெள்ளி	50–50 = 0	30–40 = –10
சனி	30–50 = –20	40–40 = 0
மொத்த வேறுபாடு	0	0

சராசரி வேறுபாடு $= \frac{0}{6} = 0 \qquad \frac{0}{6} = 0$

இரு பிரிவுகளிலும் மொத்த வேறுபாடு '0' என்று வருகிறது. எனவே சராசரி வேறுபாடும் '0'. இவ்விரு இடங்களில் மாத்திரமின்றி மற்ற எல்லா இடங்களிலும், வேறுபாடு சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்பட்டால் மொத்த வேறுபாடு '0' ஆகும். நாம் முன்பு படித்த சராசரியின் முக்கியமான குணம் இதுவாகும். சில மதிப்புகள் சராசரியைவிட அதிகமாக இருப்பதால் சில வித்தியாசங்கள் நேராகவும் (+) மற்றும் சில மதிப்புகள் சராசரியைவிடக் குறைவாகவும் இருப்பதால் சில வித்தியாசங்கள் எதிர் மறையாகவும் (—) இருக்கும். எல்லா நேர் வேறுபாடுகளின் கூட்டுத்தொகையும் எல்லா எதிர் மறை வேறுபாடுகளின் கூட்டுத் தொகையும் சமமாக இருக்கும். எனவே மொத்த வேறுபாடு '0' ஆக அமையும்.

ஒப்பீடு சிறந்த முறையில் அமைய வேண்டுமெனில் மேலே கூறிய இன்னல்களைக் கடந்தாக வேண்டும். வேறுபாடுகள் நேராகவும் எதிர் மறையாகவும் இருப்பதால் மொத்த வேறுபாடு '0' ஆக அமைந்துள்ளது. வேறுபாட்டின் எதிர்மறைக்குறியை மறைக்க வேண்டும். வேறுவிதமாகக் கூறின், நாம் வேறுபாட்டின் அளவைக் குறிக்கும் எண்ணிக்கையை மாத்திரமே எடுத்துக் கொள்ள வேண்டுமேயல்லாது அதற்குரிய நேர் எதிர்க்குறிகளைக் கவனிக்க வேண்டாம். மதிப்புகளை மாத்திரம் கவனிப்பது தனி மதிப்பைக் (absolute value) கவனிப்பது போன்றதாகும். இவ்வாறு கிடைத்த தனி மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டை உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைக்கும் விடையே சராசரி விலக்கம் அல்லது சராசரி தனி விலக்கம் எனப்படும்.

தனி விலக்கம்

நாட்கள்	பிரிவு 1	பிரிவு 2
திங்கள்	10	5
செவ்வாய்	25	10
புதன்	25	5
வியாழன்	30	0
வெள்ளி	0	10
சனி	20	0
மொத்தம்	110	30

சராசரி விலக்கம் $= \frac{110}{6} = 18\frac{1}{3}$ $\quad \frac{30}{6} = 5$

முதல் பிரிவின் சராசரி விலக்கம், இரண்டாவது பிரிவின் சராசரி விலக்கத்தைவிட அதிகமானது. எனவே இரண்டாவது பிரிவு சீரானது. சராசரி விலக்கத்தின் மதிப்பு எவ்வளவு குறைகிறதோ அந்த அளவிற்குப் பரவல் சீரானது எனக் கூறலாம்.

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{|\text{மொத்த விலக்கம்}|}{n}$$

இரு பக்கங்களிலுமுள்ள கோடுகள் குறியீடுகள் இன்றி மதிப்புகள் எண்ணிக்கை அளவில் மாத்திரம் கணிக்கப்பட்டுள்ளன என்பதைக் குறிக்கும்.

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{\Sigma \,|\, (x - \bar{x}) \,|}{n}$$

அலைவெண்களும் இருக்குமானால் அலைவெண்கள் கொண்டு பெருக்குவதற்கு ஏற்றவாறு வாய்பாடு பொருத்தமாக மாற்றியமைக்கப்படும்.

$$\frac{\Sigma \,|\, (x_i - x) f_i \,|}{N}$$

இங்கு $N = \Sigma f_i$

குறைகள்

வேறுபாடுகளின் குறிகளை ஒதுக்கிவிடுவது நல்லதல்ல. ஏனெனில் இவ்வாறு ஒதுக்குவதால் இதில் வேறுபாடுகள் செயற்கையாக்கப்படுகின்றன. சராசரியிலிருந்து வித்தியாசம் கணிப்பதால் எல்லா வித்தியாசங்களின் கூட்டுத் தொகை '0' என்று மாறுவதும், பின்னர் அதன் காரணமாக வித்தியாசங்களின் எண்ணிக்கை அளவை மாத்திரம் கவனித்துச் செயற்கையாக கணிக்கும் விந்தைச் சூழ்நிலைகளைத் தவிர்ப்பதற்காக வித்தியாசங்களை வேறு அளவுகளிலிருந்தும் கணிக்கலாம். வித்தியாசங்களைத் திங்கட்கிழமை அல்லது செவ்வாய்க்கிழமைக்கான மதிப்புகளிலிருந்து கணிக்கலாம். ஆனால் ஒவ்வொருவரும் ஒப்பீடு செய்வதற்கு ஒவ்வொரு அளவிலிருந்தும் வித்தியாசத்தை எடுப்பதால், ஒரு சீரான அளவு இல்லாதிருக்கலாம். எல்லோரிடையிலும் ஒரே சீரான ஒழுங்கு இவ்வேறுபாட்டைக் கணிப்பதில் இல்லாதிருந்தால், ஒப்பீடு நல்ல முறையில் இல்லாதிருப்பதோடு பயனற்றதாகவுமாகிவிடும்.

சராசரி விலக்கம் சராசரியிலிருந்து மாத்திரமின்றி நடுவன் அளவு, முகட்டளவு என்ற அளவுகளிலிருந்தும் கணிக்கலாம். ஆனால் இவ்வாறு நடுவன் அளவிலிருந்தும் முகட்டு அளவிலிருந்தும் சராசரி விலக்கம் கணிப்பது சிரமமானதாகும். ஏனெனில் நடுவன் அளவும் முகட்டளவும் கணிப்பதே சிரமமானது. எனவே சராசரி விலக்கம் சராசரியிலிருந்து கணிப்பதே எளிது காரணமாக பெரும்பான்மையும் கையாளப்படுகிறது.

சராசரி சிதறலளவு கெழு (Mean Co-efficient of Dispersion)

நாம் முன்பு, வீச்சு, கால்ம அளவுகளிலிருந்து சிதறலுக்கான தொடர்பளவுகள் கணித்தது போன்று, சராசரி சிதறலளவு கெழு சராசரி விலக்கத்திலிருந்தும் கணிக்கலாம். இது சராசரி துணை சிதறலளவு எனப்படும். கீழ் கண்ட முறையில் இது கணிக்கப்படும்.

$$\text{சராசரி சிதறலளவு கெழு} = \frac{\text{சராசரியிலிருந்து கணித்த சராசரி விலக்கம்}}{\text{சராசரி}}$$

$$= \frac{\Sigma \mid x - \bar{x} \mid}{\bar{x}}$$

சராசரி சிதறலளவுகெழு வேறு அளவையின்றி எண்ணிக்கையளவிலே கொடுக்கப்படும். எனவே இம்முறை ஒப்பீடு செய்வதை எளிதாக்குகிறது. முன்னர் உள்ள எடுத்துக்காட்டில் சராசரியும், சராசரி விலக்கமும் கீழ் வருமாறு,

	பிரிவு 1	பிரிவு 2
சராசரி	50	40
சராசரி விலக்கம்	110/6	30/6

சராசரி விலக்கம் அல்லது சிதறலளவு கெழு $\left.\right\}$ $\frac{110}{6 \times 50} = \frac{11}{30}, \frac{30}{6} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{8}$

விலக்கவர்க்கச் சராசரி அல்லது விலக்க வர்க்கம் (Variance) $V = \sigma^2$

சராசரி விலக்கத்தைக் கணிப்பதில் ஒரே சீரான முறையைப் பின்பற்ற வேண்டுமென்று படித்தோம். இல்லையேல் ஒவ்வொருவரும் ஒவ்வொரு முறையைப் பின்பற்றலாம். ஒருவர்

சராசரியிலிருந்தும், ஒருவர் நடுவணிலிருந்தும் ஒருவர் முகட்டள விலிருந்தும் வேறு ஒருவர் தனது விருப்பப்படி வேறு ஒரு அளவிலிருந்தும் கணிக்கலாம். சீராக ஒரே முறையைப் பின்பற்ற வேண்டுமென்பதற்காக சராசரி விலக்கம் சராசரியிலிருந்தே கணிக்கப்படுகிறது.

வித்தியாசங்கள் சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படும்போது மொத்த வித்தியாசம் 'O' என்று மாறும் என்பதைக் கண்டோம். இச்சிக்கலைத் தவிர்ப்பதற்காக, வித்தியாசங்களின் குறியீடுகளை ஒதுக்கிவிட்டு, வித்தியாசங்களை எண்ணிக்கையளவில் உள்ள மதிப்பை மாத்திரம் கருதுவது குறித்தும் கண்டோம். எனினும் இது பொருத்தமாகத் தோன்றவில்லை. ஏனெனில் அது செயற்கையானது.

வேறுபாட்டின் குறியீடுகளை ஒதுக்காமலே சிக்கலை வேறு வழிகளில் போக்கலாம். இம்முறையில் வித்தியாசங்களின் வர்க்கம் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். வித்தியாசங்களின் குறி யீடுகள் நேராகவோ அல்லது எதிர் மறையாகவோ இருந்த போதிலும், வித்தியாசங்களின் வர்க்கம் எப்போதும் நேராகவே யிருக்கும். ஏனெனில் எதிர்மறையின் வர்க்கமும் நேரானதே. வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் மொத்த மதிப்பைக் காண லாம். வர்க்கங்களின் மொத்த மதிப்பை உறுப்புகளின் எண்ணிக் கையால் வகுத்துச் சராசரி வர்க்கம் காணலாம். இது சராசரி விலக்க வர்க்கம் எனப்படும். (Mean Square Deviation) இதுவே விலக்க வர்க்கம் (Variance) எனப் புள்ளியியலில் கூறப்படும். கீழேயுள்ள எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இதைக்காண்போம்.

	நாட்கள்	விற்பனை ரூ	விலக்கம் $d = x - \bar{x}$	விலக்க வர்க்கம் $d^2 = (x - \bar{x})^2$
1.	திங்கள்	40	$40 - 50 = -10$	100
2.	செவ்வாய்	75	$75 - 50 = 25$	625
3.	புதன்	25	$25 - 50 = -25$	625
4.	வியாழன்	80	$80 - 50 = 30$	900
5.	வெள்ளி	50	$50 - 50 = 0$	—
6.	சனி	30	$30 - 50 = -20$	400
	மொத்தம்	300		2650

$$சராசரி = \frac{300}{6} = ரூ.\ 50/-$$

$$சராசரி\ விலக்க\ வர்க்கம்\ (V) = \frac{2650}{6} = 441.67$$

இரண்டாவது பிரிவையும் காண்போம்.

நாட்கள்		விற்பனை ரூ	விலக்கம் $d = x - \bar{x}$	விலக்க வர்க்கம் $d^2 = (x - \bar{x})^2$
1.	திங்கள்	35	− 5	25
2.	செவ்வாய்	50	10	100
3.	புதன்	45	5	25
4.	வியாழன்	40	0	—
5.	வெள்ளி	30	−10	100
6.	சனி	40	0	—
	மொத்தம்	240		250

$$சராசரி = \frac{240}{6} = 40.\quad சராசரி\ விலக்க\ வர்க்கம் = \frac{250}{6} = 41\frac{2}{3}$$

இரண்டாவது பிரிவில் சராசரி விலக்க வர்க்கம் முதல் பிரிவின் சராசரி விலக்க வர்க்கத்தை விடக் குறைவானது என்று தெரிகிறது. எனவே இரண்டாவது பிரிவில் உள்ள விற்பனை சீரானதும், நிலையானதென்றும் தெரிகிறது.

5. மூல விலக்கம் அல்லது தரவிலக்கம்
(Standard Deviation)

கிரேக்க மொழியில் 'σ' என்ற சிறிய (சிக்மா) எழுத்தால் குறிப்பிடப்படும் மூலவிலக்கம் சிதறலளவைக் குறிக்கும் பிறிதொரு அளவாகும். புள்ளியியலில் மிக அதிகமாக கையாளப் படக்கூடிய ஒரு மிக முக்கிய அளவாகும். எனவே இதைப் பற்றியும் இதன் கணிப்புப்பற்றியும் மிக ஆழமாகப்படிக்க

வேண்டியது இன்றியமையாதது. புள்ளியியல் என்பது சராசரி என்பதை மையப் புள்ளியாகவும், மூலவிலக்கத்தை ஆரமாகவும் கொண்டு சுழலும் ஒரு வட்டம் என விளக்கலாம்.

விலக்க வர்க்கம் அல்லது சராசரி விலக்க வர்க்கம் கணிப்பதில் கீழ்கண்ட முறைகளைப் பின்பற்றினோம்.

(1) கொடுத்துள்ள விவரங்களைக் கூட்டி மொத்த மதிப்புக் கணித்தோம்.

(2) மொத்த மதிப்பை உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்து சராசரி மதிப்புக் கணித்தோம். $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

(3) பின்னர் ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்தும் சராசரி மதிப்பைக் கழித்து ஒவ்வொன்றிற்கும் வித்தியாசம் கணித்தோம். $(x - \bar{x}) = d$

(4) பின்னர் வித்தியாசம் ஒவ்வொன்றின் வர்க்கம் கணித்தோம். (d^2)

(5) பின்னர் எல்லா வர்க்கங்களையும் கூட்டி வித்தியாசங்களின் மொத்த வர்க்கம் கண்டோம்.

$$\Sigma d^2 = \Sigma (x - \bar{x})^2$$

(6) இவ்வாறு கணித்துக் கிடைத்த மொத்த விலக்க வர்க்கத்தை நபர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துச் சராசரி விலக்கம் கணித்தோம்.

$$\frac{\Sigma d^2}{n} = \frac{(x - \bar{x})^2}{N}$$

(7) இவ்வாறு கணித்த சராசரி விலக்க வர்க்கமே, விலக்க வர்க்கமாகும்.

(8) இந்த விலக்க வர்க்கத்தின் வர்க்க மூலமே மூல விலக்கம் என்றும் 'σ' என்ற கிரேக்க எழுத்தால் குறிப்பிடப்படும்.

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n}}$$

ஒவ்வொரு வித்தியாசத்திலும் உள்ள குறிகளால் ஏற்பட்ட சிக்கலைத் தவிர்ப்பதற்காக நாம் ஒவ்வொரு வித்தியாசத்தையும் வர்க்கமாக்கி பின்னர் சராசரி வர்க்க விலக்கம் அல்லது விலக்க வர்க்கம் கணித்தோம். முதலில் வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தைக்

கணித்ததால், தற்போது சராசரி விலக்க வர்க்கத்தின் வர்க்க மூலம் கணிக்க வேண்டும். ஒன்று நேரானதும், ஒன்று எதிர் மறையானதுமான இரண்டு வர்க்க மூலங்கள் உருவாகும். நாம் நேரான வர்க்க மூலத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். முன்னர் பார்த்த எடுத்துக்காட்டை இங்கு காண்போம்.

நாட்கள்	விற்பனை (x) ரூ.	வேறுபாடு $(x-\bar{x})$	வேறுகாட்டின் வர்க்கம் $(x-\bar{x}^2)$
1. திங்கள்	40	−10	100
2. செவ்வாய்	75	25	625
3. புதன்	25	−25	625
4. வியாழன்	80	30	900
5. வெள்ளி	50	0	—
6. சனி	30	−20	400
மொத்தம்	300		2650

$$\text{சராசரி} = \frac{300}{6} = \text{ரூ. } 50$$

விலக்க வர்க்கத்தின் மொத்தம் = 2650

$$\text{சராசரியின் விலக்க வர்க்கம்} = \frac{2650}{6} = 441.67.$$

$$\text{மூல விலக்கம்} = \sqrt{441.67} = 21.02 \text{ ரூ. (நாள் ஒன்றிற்கு)}$$

மூலவிலக்கம் எப்போதும் பரவலில் விவரங்களின் அளவை களில் தான் கொடுக்கப்படும் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்ளவும்.

சராசரி விலக்க வர்க்கதின் வர்க்க மூலம் (Root Mean Square Deviation)

மூலவிலக்கத்தைச் சராசரி விலக்கத்தின் வர்க்க மூலம் எனலாம். ஆங்கிலச் சொற்றொடரை வலமிருந்து படித்தால், இதன் கணிப்பில் கையாள வேண்டிய முறைகள் வரன் முறைப் படுத்தப்படலாம்.

1.	விலக்கம் Deviation	ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் காண்
2.	வர்க்கம் Square	ஒவ்வொரு வேறுபாட்டின் வர்க்கம் காண்
3.	Mean	சராசரி வர்க்கம் காண்
4.	Root	சராசரி (வேறுபாட்டின்) வர்க்கத்தின் வர்க்க மூலம் காண்

பரவலின் மூலவிலக்கத்தின் மதிப்பு எந்த அளவுக்குக் குறைகிறதோ அந்த அளவிற்குப் பரவலின் விவரங்கள் சீரானவை என்று தெரியும். வேறு விதமாகக் கூறினால் விவரங்களின் மதிப்பிடையே அதிக வேறுபாடு இரா என்பதைக் குறிக்கும். மூல வர்க்கம் '0' என்றிருந்தால் எல்லா மதிப்பும் ஒன்று போன்றதே என்று குறிக்கும்.

இதுபோல் மூலவிலக்க வர்க்கத்தைச் சராசரியிலிருந்து கணிப்பதற்குப் பதிலாக வேறு எந்த அளவிலிருந்தும் கணிக்கலாம். எனினும் சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படும் மூல விலக்கமே அடிப்படையாகக் கருதப்படுகிறது. எனவேதான், இது அடிப்படை மூலவிலக்கம் என்றோ அல்லது தரவிலக்கம் என்றோ குறிப்பாக மூலவிலக்கம் என்று அழைக்கப்படும்.

வேறுபாட்டின் துணை எண் (Co-efficient of Variation) **வேறுபாட்டுக் கெழு**

மூல விலக்கம் எப்போதும் பரவல்களின் விவரங்கள், கொடுக்கப்பட்ட அதே அளவைகளில்தான் கொடுக்கப்படும் என்பதைக் கண்டோம். எனவே வெவ்வேறு அளவைகளில் உள்ள வெவ்வேறு பரவல்களின் மூலவிலக்கங்கள் வெவ்வேறு அளவைகளிலேயே இருக்கும். இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் பரவல்களை ஒப்பீடு செய்ய முடியாது. மூல விலக்கங்களின் அடிப்படையில் பரவல்களைப் பயனுள்ள முறையில் ஒப்பீடு செய்யவேண்டுமென்றால் மூல விலக்கங்களில் அளவைகளை நீக்கியாக வேண்டும்.

ஆனால் இது முடியாத காரியம். இத்தகைய சிக்கலை ஒரு தொடர்பளவு உதவிகொண்டு தவிர்க்கலாம். இதற்கு மூல விலக்கத்தைக்கூட்டுச் சராசரியால் வகுக்க வேண்டும்.

$$\frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\text{மூலவிலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$$

இந்த விகிதம், அளவைகள் இல்லாத வெறும் எண்ணிக்கையா கவே இருக்கும். இவ்விகிதம் மிகச் சிறியதாக இருக்கும். எனவே இவ்விகிதம் 100 கொண்டு பெருக்கப்பட்டுக் கீழ் கண்டவாறு கொடுக்கப்படும்.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

இம்முறையில் மூலவிலக்கம், சராசரியின் சதவீதமாக கொடுக்கப் படுகிறது. இதுவே, வேறுபாட்டின் துணைவெண் அல்லது விலக் கத்தின் துணைவெண் என்று கீழேயுள்ளவாறு கொடுக்கப் படும்.

$$C. V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100.$$

முன்னர் கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டின் சராசரி = 50

மூலவிலக்கம் = 20.6

எனவே வேறுபாட்டின் துணை எண் $= \frac{20.6}{50} \times 100$

$= 41.2.$

சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்க வர்க்கம் கணிப்பதிலுள்ள நன்மைகள்

விலக்க வர்க்கமும், மற்றும் மூல விலக்கமும் சராசரி யிலிருந்து கணிப்பதால் இவ்விரு அளவுகளும் மிகக் குறைந்த நிலையில் இருக்கும் என்ற ஒரு பெரிய நன்மை உண்டு. சராசரியை விடக் கூடுதலாகலோ அல்லது குறைவானதாகவோ உள்ள எந்த மதிப்பிலிருந்தும் வேறுபாடோ அல்லது விலக்க வர்க்கமோ கணித்த போதிலும் கிடைக்கும் மதிப்புசராசரியிலிருந்து கணித்துக் கிடைத்த விலக்க வர்க்கம் அல்லது விலக்கத்தை விட அதிகமாகவே இருக்கும். இதிலிருந்து சராசரியின் வேறோரு குணம் வெளிப்படும். சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படும் விலக்கவர்க்கங் கூட்டுத்தொகை எப்போதும் மிகக் குறைந்த மதிப்பு உடைய

தாக இருக்கும். எனவே கூட்டுச் சராசரியின் குணத்தைக் கீழ் கண்டவாறு விளக்கலாம்.

(1) சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படும் விலக்கங்களின் கூட்டு மதிப்பு எப்போதும் '0' ஆகவே இருக்கும்.

(2) சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்படும் விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை எப்போதும் மிகக் குறைந்த அளவுடையதாக இருக்கும்.

விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும், விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் கூறிய அதே நெறிமுறைகள் சராசரி விலக்கத்திற்கும் சராசரி விலக்க வர்க்கத்திற்கும் பொருந்தும். முதற் பண்பை ஏற்கனவே நிரூபணம் செய்து பார்த்தோம். தற்போது இரண்டாவது பண்பு குறித்துக் காண்போம்.

சராசரியிலிருந்து விலக்க வர்க்கம் கணிப்பதற்குப் பதிலாக 'A' என்ற ஒரு எதேச்சை உறுப்பிலிருந்து விலக்க வர்க்கம் கணிப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். தற்போது நமது நினைவை சிறிது புதுப்பித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$(a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$ என்பது நமக்குத் தெரிந்ததே. இதே விதி இங்கு கையாளப்படுகிறது. A என்ற எதேச்சை அளவிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கத்தை, சராசரியிலிருந்து கிடைத்த விலக்கத்திற்கும் மற்றும் சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்குமுள்ள வேறுபாட்டிற்கும் உள்ள கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும் எனக் கூறலாம்.

$x - A$ = எதேச்சை எண்ணிலிருந்து உள்ள வேறுபாடு

$x - \bar{x}$ = சராசரியிலிருந்து உள்ள வேறுபாடு

$\bar{x} - A$ = சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாடு

$$x - A = x - \bar{x} + \bar{x} - A,$$
$$= (x - \bar{x}) + (\bar{x} - A)$$

$$(x - A)^2 = \{(x - \bar{x}) + (\bar{x} - A)\}^2$$
$$= (x - \bar{x})^2 + 2(x - \bar{x})(\bar{x} - A) + (\bar{x} - A)^2$$

இது ஒரு மதிப்பிற்குரிய விரிவாக்கம் (Expansion) ஆகும். ஆனால் ஒரு பரவலில் பல உறுப்புகள் இருப்பதால் ஒவ்வொரு மதிப்பின் வேறுபாட்டிற்கும் உரிய வாக்கத்தைக் காண வேண்

டும். எல்லா வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டு வர்க்கம் காண வேண்டும். பின்னர் இது கீழ் கண்டவாறு எழுதப்படும்.

$$\underset{(1)}{\Sigma (x - A)^2} = \underset{(2)}{\Sigma (x - \bar{x})^2} + \underset{(3)}{\Sigma 2(x - \bar{x})(\bar{x} - A)}$$

$$+ \underset{(4)}{\Sigma (\bar{x} - A)^2}$$

(1) கொடுத்துள்ள மதிப்பிற்கும் எதேச்சை அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டு வர்க்கங்களின் மொத்த மதிப்பு

(2) சராசரிக்கும் கொடுத்துள்ள மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் வர்க்கங்களின் மொத்த மதிப்பு

(3) சராசரிக்கும் கொடுத்துள்ள மதிப்பிற்குமுள்ள வேறு பாடு மற்றும் சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாடு என்ற இரு அளவுகளின் பெருக்கற் பலன் $(x - \bar{x})(\bar{x} - A)$.

(4) சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்குமுள்ள வேறு பாட்டின் வர்க்கம் (மொத்தம்)

இனி மூன்றாவதாக கொடுத்துள்ள உறுப்பைத் தனியே எடுத்துப் பார்ப்போம்.

$$\Sigma 2 (x - \bar{x}) (\bar{x} - A)$$

இங்கு 2, ஒரு நிலையான அளவாக இருப்பதால் Σ அடையாளக் குறியின் வெளியே அதனை எடுத்து விடலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட பரவலைப் பொறுத்த அளவில் சராசரி $\bar{x}$ நிலையான அளவாகும். A என்ற எதேச்சையின் அளவும் நிலையானதே. எனவே $(\bar{x} - A)$ என்ற நிலையான அளவை Σ குறியின் புறத்தே எடுத்து விடலாம். தற்போது $2(\bar{x} - A)$ என்ற காரணியை Σ குறியின் வெளியே எடுத்து விடுவோம்.
விதி கீழ்கண்டவாறு எஞ்சும்

$$2 (\bar{x} - A) \Sigma (x - \bar{x})$$

ஆனால் $\Sigma (x - \bar{x})$ = சராசரியிலிருந்து கணித்த மொத்த விலக்கமாகும்.

$$= 0.$$

எனவே $\Sigma (x - A)^2 = \Sigma (x - \bar{x})^2 + 0 + \Sigma (\bar{x} - A)^2$

$$\Sigma(x - A)^2 = \Sigma (x - \bar{x})^2 + N (\bar{x} - A)^2$$

*A*யிலிருந்து கணித்த வேறு பாட்டின் வர்க்கம் = (சராசரியிலிருந்து கணித்த விலக்கத்தின் மொத்த வர்க்கம்) + (சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்கும் உள்ள வேறு பாட்டு வர்க்கத்தின் மொத்தம்)

இங்கு எல்லாவற்றையும் '*N*' கொண்டு வகுப்போம்.

$$\frac{\Sigma(x-A)^2}{N} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N} + \frac{\Sigma(\bar{x}-A)^2}{N}$$

*A*யிலிருந்து கிடைத்த விலக்க வர்க்கம் = ($\bar{x}$ விருந்து கணித்த சராசரி விலக்க வர்க்கம்) + (சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தின் சராசரி வர்க்கம்)

ஏனெனில் $\frac{\Sigma(\bar{x}-A)^2}{N} = \frac{N(\bar{x}-A)^2}{N} = (\bar{x}-A)^2$

ஒவ்வொரு உறுப்புகளையும் கீழ் கண்டவாறு குறிப்பிடுவோம்.

1. எதேச்சை எண்ணிலிருந்து கணித்த விலக்க வர்க்கம் = S^2
2. சராசரியிலிருந்து கிடைத்த விலக்க வர்க்கம் = V
3. சராசரிக்கும் எதேச்சை எண்ணுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் வர்க்கம் = d^2

எனவே $S^2 = V + d^2$ or $V = S^2 - d^2$

$$\sigma^2 = S^2 - d^2$$

இதில் *d*யின் மதிப்பு '0' என்று மாறும்போது, அதாவது $A = \bar{x}$ என்ற நிலையில் $S^2 = \sigma^2$என்று அமையும். இதிலிருந்து சராசரியிலிருந்து கணித்துக் கிடைத்த V என்ற விலக்க வர்க்கம் எப்போதும் அளவில் மிகக் குறைந்ததாகவே இருக்குமென்று தெரியும். இவ்வாறு சராசரி விலக்க வர்க்கம் குறைவாக இருப்பதால் விலக்க வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையும், வேறுபாடும் சராசரியிலிருந்து கணிக்கப்பட்டால் அளவில் குறைவாகவே இருக்கும்.

$d = (\bar{x} - A)$ இங்கு $\bar{x}$, *A* ஐ விடக் கூடுதலாக இருந்தால் இவ் அளவு நேராக இருக்கும்.

$d = (\bar{x} - A)$ என்பதில் A ஐவிட $\bar{x}$ அதிகமாக இருந்தால் இவ் அளவு எதிர் மறையாக இருக்கும்.

என்றாலும், d^2 எப்போதும் நேராகவே இருக்கும்.

மூல விலக்கத்தின் பயன்கள்

இது எல்லா விவரங்களின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளது. எளிதில் கணிக்கலாம். எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியது. மேலும் இயல் கணித செயல் முறைகட்கு வளைந்து கொடுக்கக் கூடியது.

நேர் முறை

$$V = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N}$$

$x - \bar{x} =$ விலக்கம்

விலக்க வர்க்கம் கணிப்பதற்குச் சராசரி கணிக்க வேண்டும். பின்னர் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் சராசரிக்கும் உள்ள வேறு பாட்டின் $(x - \bar{x})^2$ வர்க்கம் காண வேண்டும். பின்னர் வேறுபாட்டு வர்க்கங்களைக் கூட்டி மொத்த மதிப்புக் காண வேண்டும் $\Sigma (x - \bar{x})^2$. பின்னர் இம்மொத்த மதிப்பு, உறுப்பு களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கப்பட்டுச் சராசரி விலக்க வர்க்கம் கண்டு பிடிக்கப்படும் $\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n}$. இத்தகைய பல செயல் முறைகளைத் தவிர்த்து, விலக்க வர்க்கத்தை நேரிடையாக கொடுத்துள்ள மூல அளவுகளிலிருந்தும் கணிக்கலாம்.

$V = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N}$ என்பது நமக்குத் தெரிந்ததே.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ என்பது தெரிந்ததே.

எனவே $(x - \bar{x})^2 = x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2$

எல்லா விவரங்களுக்கும் இத்தகைய அளவுகளைக் கண்டு பிடித்தால் மொத்த மதிப்புக் கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$\Sigma (x - \bar{x})^2 = \Sigma x^2 - \Sigma 2x\bar{x} + \Sigma \bar{x}^2$$

$$\Sigma (x - \bar{x})^2 = \Sigma x^2 - 2\bar{x}\,\Sigma x + \Sigma \bar{x}^2.$$

2, நிலையான அளவு எண்ணாக இருப்பதாலும் $\bar{x}$ என்ற சராசரி நிலையான அளவாக இருப்பதாலும் 2 $\bar{x}$ என்ற அளவை அடையாளக்குறியின் வெளியே எடுத்து விடலாம்.

$$\Sigma x^2 - 2\bar{x}\,\Sigma x + N\bar{x}^2$$

ஆனால் $\Sigma x = N\bar{x}$

$$= \Sigma x^2 - 2N\bar{x}^2 + N\bar{x}^2 \quad \left(\text{since } \frac{\Sigma x}{N} = \bar{x} \therefore \Sigma x = N\bar{x}\right)$$

$$= \Sigma x^2 - N\bar{x}^2$$

ஒவ்வொரு காரணியையும் 'N' கொண்டு வகுத்து 'V' கண்டு பிடிப்போம்.

$$\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma x^2}{N} = \frac{N\bar{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$$

சராசரி மூல அளவுகளின் வர்க்கம் — சராசரியின் வர்க்கம்

இதை மேலும் சுருக்கலாம்.

$$(1) = \frac{\Sigma x^2}{N} - \left\{\frac{\Sigma x}{N}\right\}^2 \qquad (\text{Since } \bar{x} = x/N)$$

$$(2) = \frac{\Sigma x^2}{N} - \frac{(\Sigma x)^2}{N^2}$$

$$(3) = 1/N\left\{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}\right\}$$

மாணவர்கள் Σx^2 மற்றும் $(\Sigma x)^2$ என்ற இரண்டுக்குமுள்ள வேறுபாட்டை நன்கு புரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

Σx^2 = ஒவ்வொரு மதிப்பின் வர்க்கத்தின் மொத்தம்

$(\Sigma x)^2$ = எல்லா மதிப்புகளின் மொத்தத்தின் வர்க்கம். 3 மற்றும் 4 என்ற இரு அளவுகள் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\Sigma x^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25.$$

$$(\Sigma x)^2 = (3+4)^2 = 7^2 = 49.$$

மூன்று வாய்ப்பாடுகளில் ஏதாவது ஒன்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

மாணவர்களின் எடை (கி.கி.) (x)	$(x)^2$
67	4489
75	5625
80	6400
83	6889
85	7225
93	8649
97	9409
91	8281
98	9604
769	66571

முதல் முறை

$$(1)\ \Sigma \frac{x^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{66571}{9} - (85.44)^2$$

$$= \frac{66571}{9} - (85.44) \times (85.44)$$

$$= 7396.78 - 7299.99$$

$$= 96.79$$

$$\sigma = \sqrt{96.79}$$

$$= 9.8$$

இரண்டாம் முறை

$$\frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2$$

$$= 7396.78 - (769/9)^2$$

$$= 7396.78 - \frac{591361}{81}$$

$$= 7396.78 - 7300.75$$

$$\sigma = \sqrt{96.03}$$

$$= 9.8$$

மூன்றாவது முறை

$$1/N \left\{ \Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N} \right\}$$

$$= 1/9 \left\{ 66571 - \frac{769 \times 769}{9} \right\}$$

$$= 1/9 \left\{ 66571 - \frac{591361}{9} \right\}$$

$$= 1/9 \ (66571 - 65707)$$

$$= 1/9 \times 864 = \frac{864}{9} = 96.$$

$$\sigma = \sqrt{96}$$

$$= 9.8$$

மூன்று வாய்ப்பாடுகளும் ஒன்றே. முதலில் உள்ள வாய்ப்பாடு எளியதும், நினைவில் கொள்ள இலகுவானதும் ஆகும். மற்ற இரு வழிகளும் முதல் வழியின் திரிபுகளே. எனவே நாம் முதல் வழியையே பின் பற்றுவோம். முன்னர் உள்ள எடுத்துக் காட்டில் நாம் மூல விலக்க வர்க்கத்தைத் தரப்படுத்தாத விவரங் கட்கு சுருக்கு முறையில் கணித்தோம்.

$$V = \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{v}$$

இதுவே நேர்முறைக்கான வாய்ப்பாடு

எடுத்துக்காட்டு 2

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கட்கு மூல விலக்கம் கணிப்போம்.

30, 80, 60, 70, 20, 40, 50

x	x^2
30	900
80	6400
60	3600
70	4900
20	400
40	1600
50	2500
350	20300

$n = 7.$

$\Sigma x = 350.$

$$\bar{x} = \frac{350}{7} = 50.$$

$\bar{x}^2 = 50 \times 50 = 2500$

$\Sigma x^2 = 20300$

$$= \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{20300}{7}$$

V = Variance= $\frac{20300}{7} - 2500 \; : \; 2900 - 2500 = 400.$

σ = Standard Deviation $= \sqrt{400} = 20$ ரூபாய்.

சுருக்கு வழி

மூல விலக்கம் காண்பதற்குச் சுருக்கு முறைகளையே கையாளு வோம். இம்முறையில் விலக்கம் எதேச்சையான ஒரு சராசரி யிலிருந்து கணிக்கப்படும். கீழேயுள்ள முறைகள் பின்பற்றப் படும்.

1. முதலில் ஒரு சராசரியை எதேச்சையாக எடுக்க வேண்டும். இங்கு 60ஐ ஏதேச்சை அளவாகக் கொண்டு '*A*' என்று குறிப்பிடுவோம்.
2. பின்னர் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் இந்த எதேச்சை சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தைக் கண்டு பிடித்து அதை '*d*' என்று குறிப்பிடுவோம். $(d) = x - A.$
3. வித்தியாசத்தின் வர்க்கம் காண வேண்டும். $d^2 = (x - A)^2.$
4. இவ்வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை காண வேண்டும். Σd^2
5. பின்னர் வேறுபாட்டின் (*d*) மூல விலக்கம் காண வேண்டும்.

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (x - A)^2}{n} - \left\{ \frac{(\Sigma x - A)}{n} \right\}^2$$

$$= \frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n} \right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma d^2}{n} - \bar{d}^2$$

இங்கு $A = 0$ என்றிருந்தால் விதி கீழ் கண்டவாறு மாறும்

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

x	$x - A = d$	d^2
30	−30	900
80	20	400
60 — A	0	0
70	10	100
20	−40	1600
40	−20	400
50	−10	100
	$\Sigma d =$ −70	3500

$$\bar{d} = \frac{-70}{7} = -10.$$

$$\bar{d}^2 = -10 \times -10 = 100.$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \bar{d}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3500}{7} - 100}$$

$$= \sqrt{500 - 100}$$

$$= \sqrt{400}$$ ரூ. 20

'd'யின் மூல விலக்கமே xன் மூல விலக்கமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

சுருக்கு வழியில் மூல விலக்கம் கணித்தல்

முட்டையின் எடை(கி.கி.) (x)	$d = x - A$	d^2
67	−16	256
75	− 8	64
80	− 3	9
85	2	4
83 − A	0	0
93	10	100
97	14	196
91	8	64
98	15	225
	22	918

இதில் 83ஐ *A* என வைத்துக் கொண்டு ஒவ்வொரு மதிப்பின் வேறுபாட்டை 83லிருந்து கணிப்போம்.

$$n = 9; \quad \Sigma d = 22; \quad \bar{d} = 22/9 = 2.44 \quad \bar{d}^2 = 5.95$$

$$\Sigma d^2 = 918.$$

$$\text{Standard Deviation of } `d' = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \bar{d}^2}$$

$$= \sqrt{102.00 - 5.95} = 96.05$$

$$= \sqrt{96.05} = 9.8$$

நேர் முறையில் முதல் எடுத்துக் காட்டில் கணித்த அதே அளவு தான் இப்போது கணித்துக் கிடைத்ததும்.

தொடர்பில்லா பரவலுக்கான மூல விலக்கம் கணிப்பு

A நேர் முறை

கீழ் கண்டவாறு நேர் முறையில் மூல விலக்கம் காணலாம்.

1. முதலில் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் அதன் அலைவெண்ணால் பெருக்கிக் கிடைத்த மொத்த மதிப்பை அலைவெண்ணின் மொத்த மதிப்பால் வகுத்துக் கூட்டுச் சராசரி காண வேண்டும். கீழே கொடுத்துள்ள வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

2. இந்த சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் உரிய வேறுபாட்டை அல்லது வித்தியாசத்தைக் காண வேண்டும். $(x - \bar{x})$.

3. பின்னர் ஒவ்வொரு வித்தியாசத்திற்கும் வர்க்கம் காண வேண்டும். $(x - \bar{x})^2$

4. ஒவ்வொரு வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தையும் அதற்குரிய அலைவெண் கொண்டு பெருக்க வேண்டும். $(x - \bar{x})^2 f$

5. இவ்வாறு வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தை அலைவெண் கொண்டு பெருக்கிக் கிடைத்த எல்லாவற்றையும் கூட்டி மொத்த மதிப்புக் காண வேண்டும். $\Sigma(x - \bar{x})^2 f$.

6. இவ்விதம் கூட்டிக் கிடைத்த மொத்த மதிப்பை அலைவெண்ணின் மொத்த மதிப்பால் வகுக்க வேண்டும்.

$$\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2 f}{\Sigma f}$$

இது சராசரி விலக்க வர்க்கம் எனப்படும். அல்லது வர்க்கம் (Variance) எனவும் அழைக்கலாம்.

7. இவ்வர்க்கத்தில், வர்க்க மூலம் கண்டு பிடித்தால் அதுவே மூல விலக்கமாகும்.

$$\sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2 f}{\Sigma f}}$$

தரப்படுத்தாத விவரத்திற்குக் கையாண்ட அதே முறையே இதுவெனலாம். ஒரே வேறுபாடு என்ன வெனில் இரு நிலைகளில் அலைவெண்ணைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

1. சராசரி கணிக்கும் போது, ஒவ்வொரு மதிப்பையும் அதனதன் அலைவெண்ணால் பெருக்குகிறோம்.

2. இது போல் ஒவ்வொரு வேறுபாட்டின் வர்க்கத்தை யும் அதனதன் அலைவெண் கொண்டு பெருக்கு கிறோம்.

கீழே உள்ள பரவலின் மூல விலக்கம் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு

மதிப்பு x	அலைவெண் f	$x.f$
30	3	90
80	5	400
60	6	360
70	10	700
20	3	60
40	2	80
50	1	50
	30	1740

$N = \Sigma f = 30. \qquad \Sigma f.x = 1740.$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{1740}{30} = 58$$

x	f	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-x)^2f$
30	3	30–58 = –28	784	2352
80	5	80–58 = 22	484	2420
60	6	60–58 = 2	4	24
70	10	70–58 = 12	144	1440
20	3	20–58 = –38	1444	4332
40	2	40–58 = –18	324	648
50	1	50–58 = – 8	64	64
	30			11280

$$V = \frac{\Sigma (x-\bar{x})^2.f}{\Sigma f} = \frac{11280}{30} = 376$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{376} = \text{ரூ. } 19.4$$

சுருக்கு வழி

சுருக்கு வழியிலும் மூல விலக்கம் காணலாம். ஏதாவது ஒரு அளவை உத்தேச சராசரியாக எடுத்தும் மூல விலக்கம் காணலாம்.

இங்கு '50'ஐ உத்தேச சராசரியாக எடுத்து 'A' எனக் குறிப்பிடலாம். ஒவ்வொரு வித்தியாசமும் $(x—A)$ என

வும் அதன் வர்க்கம் $(x-A)^2$ என்வும் மாறும். வழிகள் கீழ் வருமாறு.

x	f	$(x-50)$ d	$(x-50)f$ fd	$(x-50)^2$ d^2	$f(x-50)^2$ $f.d^2$
30	3	−20	−60	400	1200
80	5	30	150	900	4500
60	6	10	60	100	600
70	10	20	200	400	4000
20	3	−30	−90	900	2700
40	2	−10	−20	100	200
50	1	0			0
	30		240		13200

$$N = \Sigma f = 30. \qquad \Sigma fd = 240$$

$$\therefore \bar{d} = \frac{240}{30} = 8. \qquad \bar{d}^2 = 64.$$

$$\Sigma fd^2 = 13200$$

சராசரி விலக்க வர்க்கம் $= \dfrac{13200}{30} - 64.$

$$= 440 - 64 = 376.$$

மூலவிலக்கம் $= \sqrt{376}$ = ரூ. 19.4 நபர் ஒன்றுக்கு

இம்முறையில் ஆரம்பத்தில் உள்ள மதிப்பின் x சராசரி மூல விலக்கமும், புதிதாக உருவாக்கிய '$x - 50$' என்ற மதிப்பின் மூல விலக்கமும் ஒன்றுதான் என்பது தெரிகிறது. இம்முறையில் மதிப்புகளின் வர்க்கங்கள் கண்டு பிடிப்பதில் உள்ள சிரமத்தைப் பெரிய அளவில் குறைத்துள்ளோம்.

III. தொடர்புடைப் பரவலின் மூல விலக்கம் கணிப்பு

நேர் முறை

இதிலுள்ள செயல் முறைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. ஒவ்வொரு பிரிவின் நடுவளவு காண வேண்டும். பின்னர் உள்ள முறைகள் தொடர்பில்லாப் பரவலுக்கான முறைகள் போன்றவையே.

2. பிரிவுகளின் நடுவளவுகள் அப்பிரிவுகளுக்குரிய அலைவெண்ணால் பெருக்கப்பட்டுப் பின்னர் அதன் மொத்த மதிப்பு அலைவெண்களின் மொத்த மதிப்பால் வகுக்கப் பெற்று சராசரி காண வேண்டும்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, x_i f_i}{\Sigma f_i}$$

இங்கு x_i எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது பிரிவின் நடுவளவே.

3. சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு நடுவளவிற்குரிய வேறுபாட்டைக் காண வேண்டும். $(x - \bar{x}) = d$.

4. இந்த வேறுபாட்டின் வர்க்கம் காண வேண்டும். $(x - \bar{x})^2 = d^2$

5. பின்னர் இந்த வேறுபாட்டின் வர்க்கம் அப்பிரிவின் அலைவெண்ணுல் பெருக்கப்பட வேண்டும். $(x - \bar{x})^2 f = d^2 f$

6. இவ்வாறு அலைவெண்ணால் பெருக்கிக் கிடைத்த வேறுபாட்டு வர்க்கத்தின் மொத்த மதிப்புக் கணிக்கப் பெற்று அலைவெண்களின் மொத்தத்தால் வகுக்கப் பெற்று வேறுபாட்டின் சராசரி வர்க்கம் காண வேண்டும்.

$$\frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^2 f}{\Sigma f_i}$$

7. இந்த வேறுபாட்டின் சராசரி வர்க்கத்தின் வர்க்க மூலமே, மூல விலக்கமாகும்.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^2 f_i}{\Sigma f_i}}$$

எடுத்துக்காட்டு

கீழே கொடுத்துள்ள பரவலுக்கான மூலவிலக்கம் காண்க.

பிரிவு எடை கி.கி. (x)	அலைவெண் மாணவர்கள் எண்ணிக்கை (f)
60.5 — 70.5	1
70.5 — 80.5	5
80.5 — 90.5	9
90.5 — 100.5	14
100.5 — 110.5	15
110.5 — 120.5	4
120.5 — 130.5	2
	50

நடுவளவு	(f)	$(f \cdot x_i)$
65.5	1	65.5
75.5	5	377.5
85.5	9	769.5
95.5	14	1337.0
105.5	15	1582.5
115.5	4	462.0
125.5	2	251.0
	50	4845.0

$$\text{சராசரி} = \frac{\Sigma x.f}{\Sigma f} = \frac{4845}{50} = 96.9$$

$x - \bar{x}$	f	$(x - \bar{x})^2$	$f(x - \bar{x})^2$
− 31.4	1	985.96	985.96
− 21.4	5	457.96	2289.80
− 11.4	9	129.96	1169.64
− 1.4	14	1.96	27.44
8.6	15	73.96	1109.40
18.6	4	345.96	1383.84
28.6	2	817.96	1635.92
	50		8602.00

வர்க்கம் = வேறுபாட்டில் சராசரி வர்க்கம் $= \dfrac{8602.00}{50}$

$= 172.04$

வர்க்க மூலம் அல்லது மூல விலக்கம் $= \sqrt{172.04} = 13.1$ கி.கி. நபர் ஒருவருக்கு

இம்முறையில் பல சிரமங்கள் உள. பதின்ம அளவில் உள்ள பெரிய எண்களுக்கான வர்க்கம் காண்பதும் பின்னர் அவ்வர்க்கங்களை அலைவெண் கொண்டு பெருக்குவதிலும் உள்ள சிரமம் அதிகமே. எனவே வேறு மாற்று வழிகளைக் காண் போம்.

சுருக்கு வழி

இரு சுருக்கு வழிகள் உள. முதல் வழியில் உத்தேச சராசரி '*A*' எடுத்து கணிப்பது. பின்னர் அதிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பிற்குரிய வித்தியாசத்தைக் கணித்து பிறகு அவ்வித்தியா சத்தின் மூலவிலக்கம் காண்பது.இவ்வித்தியாசத்தின் மூல விலக் கமே ஆரம்ப மதிப்பின் மூல விலக்கமாகும்.

முதல் வழி

இதில் 99.5 என்ற அளவை 'A' என்ற உத்தேச சராசரியாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

நடு அளவு (1)	$d = x - 95.5$ (2)	f (3)	$d.f$ (4)	d^2 (5)	$d^2 f$ (6)
65.5	−30	1	−30	900	900
75.5	−20	5	−100	400	2000
85.5	−10	9	−90	100	900
95.5—A	0	14	0	0	0
105.5	10	15	150	100	1500
115.5	20	4	80	400	1600
125.5	30	2	60	900	1800
மொத்தம்			70		8700

இதில் 99.5 என்ற மதிப்பை A என எடுத்துக் கொள்வோம். கீழே உள்ள வாய்பாட்டின் மூலம் 'd' என்ற புதியதொரு மதிப்பை உருவாக்கலாம்.

$$d = x - A = x - 99.5$$

இவ்வாறு உருவாகிய புதிய மதிப்புகள் 2வது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பின்னர் 'd' என்ற புதிய மதிப்பிற்கான சராசரியும், மூல விலக்கமும் காண்போம்.

$$\bar{d} = \frac{70}{50} = 1.4 \qquad V(d) = \frac{\Sigma d^2 f}{n} - \bar{d}^2$$

$$= \frac{8700}{50} - 1.4 \times 1.4$$

$$= \frac{8700}{50} - 1.96$$

$$= 174 - 1.96 = 172.04$$

மூல விலக்கம் $= \sqrt{172.06} = 13.1$ கி.கி.

இதை வேறு ஒரு வழியிலும் வலியுறுத்தலாம். ஏதாவது ஒரு மதிப்பிலிருந்து கணித்துக் கிடைக்கும் சராசரி வேறுபாட்டின் வர்க்கம் எப்போதும் சராசரியிலிருந்து கணிக்கும் சராசரி வேறு பாட்டின் வர்க்கத்தை விட மதிப்பில் அதிகமானதென்றும் கண்டோம். மேலும் அவ்விரண்டிற்கும் உள்ள வேறுபாடு சராசரி மற்றும் அத்தகைய அளவு A என்ற இரண்டிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாகயிருக்கும் என்றும் கண்டோம். 'A' என்ற அளவிலிருந்து கணித்துக் கிடைத்த வேறுபாட்டின் சராசரி வர்க்கம்

$$= V(x) + (\bar{x} - A)^2$$
$$= V(x) + (96.9 - 95.5)^2$$
$$= V(x) + (1.4)^2$$
$$= V(x) + 1.96$$
$$\therefore V(x) = 174 - 1.96 = 172.04$$

இவ்வாறு விருப்பளவிலிருந்து கணிக்கும் முறை அடிப்படை மாற்ற முறை எனப்படும்.

இரண்டாம் வழி

இம்முறையில் அடிப்படை மாத்திரமன்றி அளவும் மாற்றப் படும். கீழேயுள்ள சமன்பாடு பின்பற்றப்படும்.

$$d = \frac{x - A}{C}.$$

இதில் A என்பது விருப்பளவாகவும் C வகுப்பு இடை வெளியாகவும் இருக்கும். இம்முறையில் ஒவ்வொரு மதிப் பும் C கொண்டு வகுக்கப்பட்டு C யின் ஒரு பகுதியாக கருதப்படும். முன்னுள்ள அதே பரவலுக்கு மூல விலக்கம் காண்போம்.

நடுவளவு x_i	அலைவெண் f
65.5	1
75.5	5
85.5	9
95.5	14
105.5	15
115.5	4
125.5	2

விருப்பளவைக் கழித்த பிறகு ஒவ்வொரு மதிப்பும் கீழ் கண்டவாறு சுருக்கப்படும். இங்கு 95.5 (*A*) யை விருப்பள வாகவும் '10' என்பதை (*C*) என்றும் கருதுவோம்.

$$\frac{65.5 - 95.5}{10} = \frac{-30}{10} = -3$$

$$\frac{75.5 - 95.5}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$\frac{85{\cdot}5 - 95{\cdot}5}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\frac{95{\cdot}5 - 95{\cdot}5}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

$$\frac{105.5 - 95.5}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{115.5 - 95.5}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{125.5 - 95.5}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

'*d*' என்ற புது மதிப்பின் பரவல் கீழ்கண்டவாறு மாறும். பின்னர் '*d*' என்ற அளவிற்கு முதல் முறையில் மூல விலக்கம் கணித்த முறையையே இங்கும் பின்பற்றுவோம். இவ்வாறு '*d*' யின் மூல விலக்கம் காண்போம்.

x_i (1)	d (2)	f (3)	fd (4)	d^2 (5)	fd^2 (6)
65.5	−3	1	−3	9	9
75.5	−2	5	−10	4	20
85.5	−1	9	−9	1	9
95.5	0	14	0	0	0
105.5	1	15	15	1	15
115.5	2	4	8	4	16
125.5	3	2	6	9	18
மொத்தம்		50	7		87

குறிப்பு

5வது நிரல் வரிசையை நாம் தவிர்க்கலாம். 6வது நிரல் வரிசையை, 2 வது நிரல் வரிசையையும் 4 நிரல் வரிசையையும் பெருக்கி நேரடியாகக் கணிக்கலாம்.

$$N = \Sigma f = 50.$$

$$\bar{d} = \frac{\Sigma f d}{N} = 7/50 = 0.14$$

'd' யின் வர்க்கம் $= V(d) = \frac{\Sigma f d^2}{N} - \bar{d}^2$

$$= 87/50 - 0.14 \times 0.14 = 1.74 - 0.0196$$

$$= \sqrt{1.7204}$$

$= 1.31$ கி.கி.

முன்னுள்ள முறையில் அடிப்படை மாறும் பொழுது 'd' யின் மூல விலக்கமும் 'x' ன் மூல விலக்கமும் ஒன்று எனக் கண்டோம். ஆனால் இம்முறையில் அடிப்படையை மாத்திரமல்லாமல் 10 (C) கொண்டு வகுத்து அளவையும் மாற்றியுள்ளோம்.

ஒவ்வொரு 'd' ன் மதிப்பும் ஒவ்வொரு x ன் மதிப்பில் 10ல் ஒரு பாகமாகயிருப்பதால், 'd' யின் மூலவிலக்கமும் x யின் மூல விலக்கத்தில் 10ல் ஒன்றாகத்தானிருக்கும். வேறு விதமாகக் கூறினுல் x யின் மூலவிலக்கம் 'd' யின் மூலவிலக்கத்தைப் போல் 10 மடங்கு அதிகமாகயிருக்கும்.

'x'யின் வர்க்கம் $= 100 \times$ 'd' யின் வர்க்கம்

$$V(x) = 100 \times 1.7204$$

$$= 172.04$$

இது போன்று மூல விலக்கமும்

$$\sigma x = 10 \times \sigma d$$

$$= 10 \times 1.31$$

$= 13.1$ கி.கி.

இம்முறையில் முன்னர் கொடுத்துள்ள, 65.5, 75.5, 85.5 என்ற : அளவுகள் யாவும் அளவில் சுருக்கப்பட்டு, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, என்ற சிறிய அளவுகளாக மாற்றப் பட்டுள்ளன. இச்சிறிய அளவுகளின் வர்க்கங்கள் எந்த வித அட்டவணையின் உதவியின்றி இலகுவில் கணிக்கப்படலாம். இதன் காரணமாக எண்களின் வர்க்கம் காண்பதிலும், பெருக்குவதிலும் உள்ள சிரமங்களைத் தவிர்த்துக் காலத்தை யும் மிச்சப்படுத்தலாம்.

வாய்ப்பாடு

xயின் S.D. $= c \times$ 'd' யின் S.D.

$$\sigma x = C\,\sigma d$$

$$\text{Let } d = x - A$$

$$\therefore \bar{d} = \bar{x} - A$$

$$d - \bar{d} = (x - A) - (\bar{x} - A)$$

$$= x - \bar{x}$$

$$(d - \bar{d})^2 = (x - \bar{x})^2$$

$$\Sigma (d - \bar{d})^2 = \Sigma (x - \bar{x})^2$$

N கொண்டு வகுத்தால்

$$\therefore \frac{\Sigma (d - \bar{d})^2}{N} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N}$$

$$V(d) = V(x)$$

$$\therefore \sigma d = \sigma x$$

'd' யின் வர்க்கம் = 'x'ன் வர்க்கம்

'd' யின் மூலவிலக்கம் = 'x'ன் மூல விலக்கம்

அடிப்படையை மாற்றுவதால் மூலவிலக்கத்தின் மதிப்பில் எந்த வித மாற்றமும் உண்டாவதில்லை.
அளவை மாற்றுவோம்.

நிருபணம்

$$\text{Let } 'd' = \frac{x - A}{C}$$

$$\therefore \bar{d} = \frac{\bar{x} - A}{C}$$

$$\therefore \quad d - \bar{d} = \left(\frac{x - A}{C}\right) - \left(\frac{\bar{x} - A}{C}\right)$$

$$= \frac{x - A - \bar{x} + A}{C} = \frac{(x - \bar{x})}{C}$$

$$\therefore \quad (d - \bar{d})^2 = \left(\frac{x - \bar{x}}{C}\right)^2$$

$$\Sigma\,(d - \bar{d})^2 = \Sigma\,\left(\frac{x - \bar{x}}{C}\right)^2$$

N கொண்டு வகுத்தால்

$$\frac{\Sigma\,(d - \bar{d})^2}{N} = \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^2}{N.\,C^2}$$

'd' யின் வர்க்கம் $=$ $\dfrac{\text{'}x\text{' ன் வர்க்கம்}}{C^2}$

குறுக்கு பெருக்கல் விதிப்படி

$C^2 \times d$யின் வர்க்கம் $=$ 'x' ன் வர்க்கம்

$$C^2\,V(d) = V\,(x)$$

$$\therefore \quad \sqrt{C^2\,V(d)} = \sqrt{V\,(x)}$$

$$\therefore \quad C \times \sigma\,(d) = \sigma\,(x)$$

மீள் பார்வை (Restrospect)

மூலவிலக்கம் புள்ளியியலில் முக்கிய இடம் பெறுவதால், இது வரை படித்ததை மீண்டும் ஒரு முறை நோக்கினல் பலனளிக்கும். இது வரை நாம் இருவிதமான விவரங்களுக்கு (1) தரப்படுத்தாத அல்லது பகுக்கப்படா விவரங்களுக்கு, (2) தரப்படுத்திய அல்லது பகுக்கப்பெற்ற அலைவெண் பரவலுக்கும் மூல விலக்கம் கணிப்பது குறித்துக் கண்டோம். அலை வெண் பரவலைப் பொறுத்தளவில் தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவல் என்றும் தொடர்புடை அலைவெண் பரவல் என்றும் இரு வித விவரங்களைப் பாத்தோம். எனவே (1) தரப்படுத்

தாத விவரம் (2) தொடர்பில்லா அலைவெண் பரவல் (3) தொடர்புடை அலைவெண் பரவல் என மூன்று வகையான விவரங்களைப் பாத்தோம்.

ஒவ்வொரு பிரிவிலும் ஒன்று நேர் வழி என்றும் மற்றொன்று சுருக்கு வழி என்றும் இரு வழிகளைக் கண்டோம். தொடர்புடை அலைவெண் பரவலைப் பொறுத்தளவில் இருவித வாய்ப்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினோம்.

$$(i)\quad d = x - A: \qquad (ii)\quad d = \frac{x - A}{C}$$

இப்பொழுது ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் இம்முறையில் உள்ள பயன்களையும், கணித்துக் கிடைத்த அளவின் துல்லியத் தன்மையையும் காண்போம். இதற்காக 50 மூட்டை தானியத்தின் எடையைக் கருதுவோம். இதே எடுத்துக்காட்டை (1) முதலில் விவரங்களைப் பகுப்பதிலும் (2) தொடர் அலைவெண் பரவலுக்கான சராசரி கணிப்பின் போதும் (3) தொடர் அலைவெண் பரவலின் மூலவிலக்கம் கணிக்கும் போதும் கையாண்டோம்.

எடுத்துக்காட்டு—(மூல விலக்கம் கணித்தல்)

50 மூட்டைகளின் எடை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

67, 75, 127, 80, 85, 83, 93, 97, 91,

98, 98, 94, 102, 100, 102, 104, 105, 105,

103, 102 121, 114, 79, 72, 82, 87, 88,

98, 107 103, 90, 92, 98, 118, 111, 110,

106, 97, 109 108, 107, 76, 89, 85, 88,

97, 91, 98, 112 106.

முதல் வழி

இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைத் தரப்படுத்தாத விவரங்களாகக் கருதி சுருக்கு வழியில் மூலவிலக்கம் காண்போம். (சராசரி கண்டுபிடித்து கணிக்காமல்) கொடுத்துள்ள விவரங்களின் வர்க்கத்திலிருந்து கணிப்பதற்கொப்பாகும்.

x	x^2	x	x^2
67	4489	87	7569
75	5625	88	7744
127	16129	98	9614
80	6400	107	11449
85	7225	103	10609
83	6889	92	8464
93	8649	90	8100
97	9409	98	9604
91	8281	118	13924
98	9604	110	12100
98	9604	111	12321
94	8836	106	11236
102	10404	97	9409
100	10000	109	11881
102	10404	108	11664
104	10816	107	11449
105	11025	76	5776
103	11025	89	7921
105	10609	85	7225
102	10404	88	7744
121	14641	97	9409
114	12996	91	8281
79	6241	98	9604
72	5184	112	12544
82	6724	106	11236

xன் மொத்தம் $= 4850$

x^2ன் மொத்தம் $= 478479$

$\Sigma x = 4850 \qquad \bar{x} = 97$

$\Sigma x^2 = 478749 \quad N = 50.$

$$V = \frac{478479}{50} - 97 \times 97$$

$$= 9569{\cdot}68 - 9409 = 160.68$$

$$\sigma = \sqrt{160{\cdot}68} = 12.7 \text{ kg. per head.}$$

இரண்டாவது முறை

இதற்கான அலைவெண் பரவல் அமைப்போம்

பிரிவு	அலைவெண்
65.5 – 75.5	1
75.5 – 85.5	5
85.5 – 95.5	9
95.5 – 105.5	14
105.5 – 115.5	15
115.5 – 125.5	4
125.5 – 135.5	2
	50

மூலவிலக்கம் கணிப்பது பற்றி அலைவெண் பரவலின் கீழ் முன்னர் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மூலவிலக்கம் 12.7 என்றும் கண்டுள்ளோம். இம்மதிப்புகளை ஒப்பு நோக்குவோம்.

		தரப்படுத்தாத விவரம்	பகுக்கப்பெற்ற விவரம்
(1)	சராசரி	97 கி.கி.	96.9 கி.கி.
(2)	வர்க்கம்	160.68 கி.கி.	172.04 கி.கி.
(3)	மூலவிலக்கம்	12. 7 கி.கி.	13. 1 கி.கி.

இவ்விரு முறைகளிலும் கணித்த சராசரிகளிடையே அதிக வேறுபாடு இல்லாதிருப்பினும், வர்க்கங்களின் மதிப்பிடையேயும் மூலவிலக்கங்களின் மதிப்பிடையேயும் வேறுபாடு பெரிதாக உள்ளன.

மேலும் தரப்படுத்தாத விவரங்களுக்குக் கணித்த வர்க்கத்தின் மதிப்பும் மூல விலக்கத்தின் மதிப்பும், விவரங்களைச் தரப்படுத்தப்பட்ட பின் கணித்துக் கிடைத்த வர்க்கத்தின் மதிப்பு, மற்றும்மூல விலக்கத்தின் மதிப்பை விடவும் அதிகமாகவே உள்ளன. தரப்படுத்தாத விவரத்திற்குக் கணித்த இவ்விரு அளவுகளும் மிகவும் சரியானவை எனத் தெரியும். ஏனெனில் அம்முறையில் எந்த விதமான எடுகோள்களோ, உத்தேச அநுமானங்களோ அடங்கவில்லை. ஆனால் பிரிவு வாரியாக விவரங்களைப் பகுக்கும் போது ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உள்ள விவரங்கள் அப்பிரிவுகளில் நடுவளவிற்குச் சமமாகயிருக்கும் என்றதோர் எடுகோளை நாம் கையாள்கிறோம். இத்தகைய எடுகோளைக் கையாள்வதால்தான் தரப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கான சராசரியின் அளவுகளில் வேறுபாடு உள்ளன. இது போன்றுதான் தரப்படுத்தப்பட்ட விவரங்களுக்கான வர்க்க அளவிலும், மூல விலக்க அளவிலும் வேறுபாடுள்ளன.

நமது இத்தகைய எடுகோள் சரியானதல்ல என்பது தெரிந்ததே. இத்தகைய எடுகோள் காரணமாக காணப்படும் வேறுபாடு உண்மையில் விவரங்களைப் பகுப்பதால் ஏற்படுவது என்பதும் தெரிந்ததே. ஒரு பரவலில் உள்ள பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை பிரிவு இடைவெளி அளவைப் பொறுத்தது. எனவே சரியான வர்க்க அளவு அல்லது மூலவிலக்க அளவு வேண்டுமென்றால் பிரிவு இடைவெளி அளவு அடிப்படையில் அமைந்ததோர் திருத்தம் கொண்டு வர வேண்டும்.

செப்பர்ட்ஸ் திருத்தம் (Shepperd's Correlation)

கையாள வேண்டிய திருத்தம் செப்பர்ட்ஸ் திருத்தம் எனப்படும். இது $C^2/12$ என்பதற்குச் சமமாகும். இங்கு C என்பது பிரிவு இடைவெளி அளவைக் குறிக்கும். பிரிவு முறையில் கிடைத்த வர்க்க அளவு சற்று அதிகமாகத் தெரிவதால், திருத்த அளவைக் கழித்து சரியான வர்க்க அளவைக் கணிக்க வேண்டும்.

$$C = 10$$

திருத்த அளவு $= C^2/12 = 100/12 = 8.33$

தரப்படுத்தப்பட்ட அளவிற்கான வர்க்கம் $= 172.04$

∴ திருந்திய வர்க்கம் $= 172.04 - 8.33$

$= 163.71$

மூலவிலக்கம் $= \sqrt{163.71} = 12.8$

$= 12.8$

திருத்திய அளவு வேறுபாடு மேலும் குறைத்துள்ளது.

	தரப்படுத்தப் படாத விவரம்	தரப்படுத்தப் பட்ட விவரம்	திருத்தம் செய்த பின்னர் உள்ள மதிப்பு
V = வர்க்கம்	160.68	172.04	163.71
σ = மூலவிலக்கம்	12.7	13.1	12.8

இது ஏறக்குறைய நாம்முன்பே கையாண்ட அதே முறையே எனினும் கொடுத்துள்ள அதே அளவிற்குப் பதிலாக நடுவளவு கவனிக்கப்பட்டுள்ளன என்ற ஒரு வேறுபாடே. ஆனால் இம் முறையில் மதிப்புகளின் வர்க்கங்கள் காண்பதிலும், மதிப்புகளைப் பெருக்குவதிலும் உள்ள சிரமங்கள் குறைந்துள்ளன. இத்தகைய சிரமங்கள் நாம் உத்தேச அளவை எடுத்துக் கணிக்கும் போது தவிர்க்கப்படுகின்றன.

அலைவெண் பரவல் மற்றும் அலைவெண் வளைகோட்டிற்குரிய பண்புகள்

வெவ்வேறு பரவல்களை ஒப்பிடுவதற்கு சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் கருவிகளாக அல்லது அளவு கோல்களாகப் பயன் படும். ஒன்றிற்கொன்றுள்ள நெருக்கத்தை உறுதிப்படுத்த சரா சரியும், ஒன்றிற்கொன்றுள்ள வேறுபாட்டை விளக்க திட்ட விலக்கங்களும் பயன்படும். பல பரவல்களை ஒப்பிட வேண்டு மானால் பரவல்களில் உள்ள உறுப்புகளை மொத்த எண்ணிக்கை ஒன்றுபோல் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

என்றாலும் வெவ்வேறு பிரிவுகளின் அலைவெண்களை நூற்றுமான அளவில் மாற்றி பரவல்களின் மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒன்று போல் 100 என மாற்றி விடலாம். இம் முறையில் மறைமுகமாக எல்லா விவரங்களின் மொத்த உறுப்பு எண்ணிக்கையை அல்லது மொத்த அலைவெண்களை ஒன்று

போலாக்குகிறோம். மேலும் அலைவெண்களின் நூற்றுமான அளவை சாத்தியக் கூற்றளவிலும் மாற்றி, எல்லா விவரங்களின் மொத்த உறுப்பு எண்ணிக்கையை 1 எனவும் மறைமுகமாக மாற்றலாம். இம்முறையிலும் எல்லாப் பரவல்களின் மொத்த உறுப்பு எண்ணிக்கை ஒன்று போலிருக்கிறது.

அலைவெண் பரவலுக்கு அலைவெண் வளைகோட்டு உருவம் வரையலாம் என்று முன்பு கண்டோம். எனவே பல அலைவெண் பரவல்களை அவற்றிற்கான வளைகோடுகளால் ஒப்பிடலாம். வளைகோட்டின் பரப்பு பரவலின் மொத்த உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்திருக்கும். பரவல்களின் மொத்த உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை வேறுபடுந்தோறும், வளைகோட்டு உருவத்தின் பரப்பும் வேறுபடும்.

என்றாலும், பரவல்களின் மொத்த் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கைக்குப் பதிலாக, நூற்றுமான அளவுகளைப் பயன்படுத்தினால், பல வளைகோட்டு உருவங்களின் பரப்பை ஒன்று போல் ஆக்குவோம். இது போன்று பரவலின் உறுப்பினர் எண்ணிக்கைக்குப் பதிலாக சாத்தியக் கூற்றளவைப் பயன்படுத்தினாலும் வளைகோட்டு உருவத்தின் பரப்பை ஒன்று போலாக்கி விடலாம்: ஏனெனில் எல்லா பரவல்களுக்கும் உள்ள மொத்த சாத்தியக் கூற்றளவு 1. மொத்த சாத்தியக் கூற்றளவு எப்போதும் ஒன்றுதான். இத்தகைய வளைகோடு ஒருங்கிணை சாத்தியக் கூற்று வளைகோடு (Probability Integral Curve) என்றழைக்கப்படும்.

சராசரியைச் சுற்றிலும் பரவலின் பல்வேறு மதிப்புகள் குவிந்திருக்கும் என்று கண்டோம். அவற்றில் சில மதிப்புகள் சராசரியை விட அளவில் கூடியதாகவும் சில மதிப்புகள் குறைந்துமிருக்கலாம். என்றாலும் எல்லா சாத்தியக் கூற்று வளைகோட்டின் பரப்பு ஒன்றாகவேயிருக்கும். ஏனெனில் மொத்த பரப்பு எப்போதும் '1' யைக் குறிப்பதாகவேயிருக்கும். என்றாலும் பரப்பு வளைகோட்டு உருவத்தின் உயரமோ அல்லது அகலமோ வேறுபடலாம். என்றாலும் பரப்பு நிலையாக இருப்பதால், உருவத்தின் உயரம் அதிகரிக்குமானால், அகலம் அல்லது அடிப்பாக விரிவு குறையலாம். அல்லது உயரம் குறையுந்தோறும் அகலம் அதிகரிக்கலாம். பாத விரிவு குறையுந்தோறும் உறுப்பினர்களின் மதிப்புகளிடையேயுள்ள வேறுபாடும் குறைந்து காணப்படும். எல்லா உறுப்பினர்களின் மதிப்பு வேறுபாடின்றி ஒன்றாகவேயிருந்தால், எல்லா மதிப்பும் 'சராசரிக்குச் சமமாக

யிருக்கும். எனவே இந்நிலையில் பரவலின் உருவமும் சராசரிக்குரிய இடத்திலிருந்து வரையப் பெற்ற ஓர் நேர்கோடாகவே இருக்கும். வளைவின் அடிப்பாக அகலத்தை 6 சமபாகங்களாக பிரிக்கலாம். சராசரிக்கு இடப்பக்கத்தில் உள்ள பிரிவின் மதிப்புச் சராசரியைவிடக் குறைவாகவும், வலப்பக்கத்தில் உள்ள மதிப்புச் சராசரியை விடக் கூடுதலாகவும் இருக்கும். நமது ஒப்பீட்டை பயனுள்ள முறையில் செய்ய வேண்டுமென்றால், இரு பக்கங்களிலும் உள்ள ஒவ்வொரு பகுதியின் அளவையும் '1' க்கு சமமாக வைத்துக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு பகுதியின் 1க்கு சமமாக வைத்துக் கொண்டாலும், ஒவ்வொரு பகுதியின் அகல அளவு பரவல்களின் உருவத்தைப்பொறுத்து வேறுபடும். ஏனென்றால் ஒவ்வொரு பகுதியின் அளவு அவ்வப் பரவலின் மூலவிலக்கத்தின் அளவைப் பொறுத்திருக்கும். பொதுவாக எண்கள் யாவும் '0' விலிருந்து ஆரம்பிக்கப்படும். ஏனெனில் சராசரி 0 எனக் கருதப்படுகிறது. ஆகையால் சராசரிக்கு இடப்பக்கத்து அளவுகள்-3, -2, -1 என்றும் வலப்பக்கத்து அளவுகள் 1,2,3 என்றும் குறிக்கப்படும். ஆகவே வளைகோடு — 3லிருந்து + 3வரை 0யைச் சராசரியாக வைத்துச் செல்லும் எனக் கருதுகிறோம். பொதுவாக இவ் வளைகோடுகள் யாவும் கோயில் மணி உருவில் இருக்கும். இத்தகைய வளைகோடுகள் பொது ஒழுங்கு வளைகோடு எனப்படும் (Normal Curve).

அலைவெண் பரவலின் பெருக்குச் சுழல் திறன் (Moments of frequency Distribution)

அலைவெண் பரவலின் முக்கிய குணம் அலைவெண் பரவலிலிருந்து பெருக்குச் சுழல் திறன் என்ற நிலையான அளவுகளால் விளக்கப்படும்.

மேலும் பெருக்குச் சுழல் திறனளவு எந்த அளவிலிருந்தும் கணிக்கலாம். எனினும் சராசரிலிருந்து கணிக்கப்படும் அளவிற்கு மிக முக்கியத்துவம் உண்டு. எனவே அவை மையப் பெருக்குச் சுழல் திறன் (Central Moment) எனப்படும். மேலும் ஆதி அல்லது ஆரம்பத்தைக் குறிக்கும் '0' விலிருந்தும் கணிக்கலாம். இவ்வாறு 0 விலிருந்து கணிக்கப்பெறும் பெருக்கு சுழல் திறனளவு தரப்படுத்தாத பெருக்குச் சுழல் திறனளவு (Raw moment) எனப்படும். எத்தகைய நிலைக்கும் பெருக்குச் சுழல் திறனளவு கணிக்கலாம். பொதுவாக சுழல் திறனளவுகள் μ என்று குறிப்பிடப்படும். மேலும் பல நிலைப் பெருக்குச் சுழல் திறனளவுகள் $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots \mu_r$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

எனினும் பொதுவாக 'r' நிலை மைய பெருக்குச் சுழல் திறனளவு μ_r என்று குறிப்பிடப்படும். இது போன்று 'r' தரப்படுத்தாத பெருக்குச் சுழல் திறனளவு μ'_r என்றும் குறிப்பிடப்படும்.

'r' நிலை மையப் பெருக்குச் சுழல் திறன் $= \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^r f_i}{N}$

'r' நிலை தரப்படுத்தாதப் பெருக்குச் சுழல்திறன் $= \frac{\Sigma (x_i - O)^r f_i}{N}$

∴ முதல் மைய நிலைப் பெருக்குச் சுழல்திறன் $\mu_1 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) f}{N}$

முதல் நிலை செப்பனிடாப் பெருக்குச் சுழல் திறன் $= \mu^1_1 = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \bar{x}$

இரண்டாம் நிலை மைய பெருக்குச் சுழல் திறன் $\mu_2 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2 f_i}{N}$

$$V = \sigma^2$$

$$\mu^1_2 = \frac{\Sigma x_i^2 f_i}{N}$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}$$

$$= \frac{\Sigma x_i f_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$= \mu'_2 - \mu'^2_1$$

∴ இரண்டாம் நிலை மையப் பெருக்குச் சுழல்

திறன் அளவு = இரண்டாம் நிலை தரப்படுத்தாத பெருக்கும் சுழல் திறன் — தரப்படுத்தாத முதல் நிலையளவின் வர்க்கம்

இவ்வாறு 3வது 4வது மைய நிலை, மற்றும் தரப்படுத்தாதப் பெருக்குச் சூழல் திறன் அளவுகளைக் கணிக்காலம்.

$$\mu_3 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^3 f_i}{N}$$

$(x - \bar{x})^3$ என்ற விரிவாக்கத்தைப் பார்ப்போம்

$$= x^3 - 3x^2\bar{x} + 3x\bar{x}^2 - \bar{x}^3$$

$$\Sigma(x - \bar{x})^3 = \Sigma x^3 - \Sigma 3x^2\bar{x} + \Sigma 3x\bar{x}^2 - \Sigma\bar{x}^3$$

$$= \Sigma x^3 - 3\bar{x}\Sigma x^2 + 3\bar{x}^2\Sigma x - \Sigma\bar{x}^3$$

$$= \Sigma x^3 - \Sigma 3x^2\bar{x} + \Sigma 3\bar{x}^3 - \Sigma\bar{x}^3$$

$$= \Sigma x^3 - 3\Sigma x^2\bar{x} + 2\Sigma\bar{x}^3$$

Dividing by "N" we get $= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1$

இதிலிருந்து மையப் பெருக்குச் சுழல் திறனளவுகள் யாவும் தரப்படுத்தாத பெருக்குச் சுழல் திறனளவுகளில் விளக்கப்படும் என்று தெரியும். இவ்வாறு நான்காம் நிலை மையப் பெருக்குச் சுழல் திறனளவுகள் தரப்படுத்தாத பெருக்குச் சுழல் திறன் அளவுகளால் விளக்கப்படும்.

$$= \Sigma(x - \bar{x})^4 f$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^4 f_i}{N}$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'^2_1\mu'_2 - 3\mu'^4_1$$

அலைவெண் பரவலின் சீரின்மை (Skewness of frequency distribution)

சராசரியும் திட்டவிலக்கமும் அலைவெண் பரவலின் இரு முக்கிய குணங்களை விளக்கும். அவையாவன. (1) மைய அளவு (2) மைய அளவைச் சுற்றி எந்த அளவிற்கு இதர அளவுகள் குவிந்துள்ளன என்பதே. அலைவெண்ணின் இன்னொரு குணம் 'கூன்' அல்லது சீரின்மை என்பதாகும்.

ஒரு பரவலைச் சமச் சீர் பரவல் அல்லது சமச்சீரற்ற பரவல் என இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். இது அலைவெண்ணைப் பொறுத்தது. முகட்டளவில் இரு பக்கத்திலும் சம இடைவெளி தூரத்தில் உள்ள இடங்களில் உள்ள அலைவெண்கள் சமமாகயிருந்தால் அது சமச் சீர் பரவல் எனப்படும். வேறு விதமாகக் கூறினால் முகட்டளவின் இரு மருங்கிலும் சம இடங்களில் சம அலைவெண்கள் இருக்கும். இதை ஒரு அலைவெண் பரவல் மூலமாகக் கவனிப்போம்.

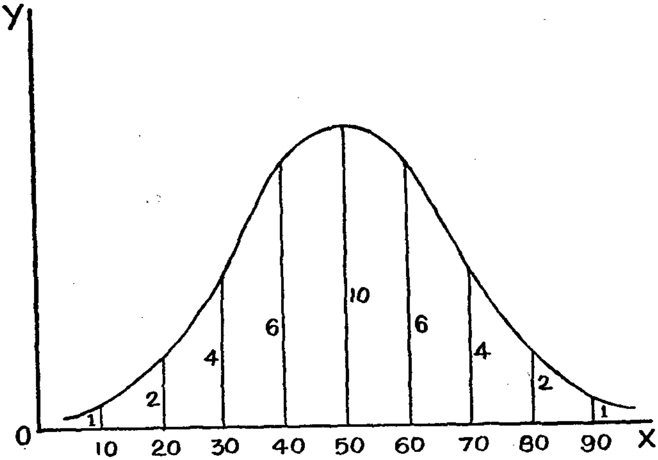
மதிப்பு	அலைவெண்
10	1
20	2
30	4
40	6
50	10
60	6
70	4
80	2
90	1
முகட்டளவு	50

இதில் 40 மற்றும் 60 என்ற இரு அளவுகளும் முகட்டளவின் (50) இரு மருங்கிலும் 10 என்ற சம அளவு இடைவெளி தூரத்தில் உள்ளன. இதுபோல் 30, 70 என்ற இரு அளவுகளும் முகட்டளவில் இரு மருங்கிலும் 20 என்ற சம வெளி தூரத்தில் உள்ளன. இது போல் 20, 80 என்ற அளவுகளும், 10 மற்றும் 90 என்ற இரு அளவுகளும் முகட்டளவின் இரு பக்கங்களின் சமவெளி தூரத்தில் உள்ளன.

முகட்டளவின் இரு பக்கத்திலும் சமவெளி தூரத்தில் உள்ள 40 மற்றும் 60 என்ற இரு அளவுகளுக்குரிய அலைவெண் ஒன்று போல் 6. இது போன்று 30 மற்றும் 70 என்ற மதிப்புகளுக்குரிய அலைவெண் 4. மேலும் 20, 80 என்ற அளவுகளுக்குரிய அலைவெண் 2. மற்றும் 90 மற்றும் 10 என்ற அளவுகளுக்குரிய அலைவெண் 1. முகட்டளவின் இரு பக்கங்களிலும் சம இடைவெளி தூரத்தில் உள்ள மதிப்புகளுக்குரிய அலைவெண் சமமாக உள்ளன. இதுவே சமச் சீர்புடை அலைவெண் பரவல் எனப்படும்.

சமச் சீர்புடை அலைவெண் பரவலுக்கான வளைகோடு

சமச் சீர்புடை அலைவெண் பரவலுக்கான வளைகோடு கீழ் வருமாறு. இது சரியானதோர் மணி போன்ற வளை கோடாக இருக்கும்.



படம் 16
சமச்சீர்புடை அலைவெண் பரவல்

இம்மாதிரியுள்ள எந்த வளைகோட்டுருவமும் சமச்சீர்புடை வளைகோடு என்றும் அதற்கான அலைவெண் பரவல் சமச் சீர்புடை அலைவெண் பரவல் என்றும் அழைக்கப்படும். சமச் சீர்புத் தன்மையிலிருந்து விலகிச் செல்லுமானால் அது சீரின்மை உடையது அல்லது கூன் உடையது என்று கூறப்படும். அத் தகைய பரவலும் கூனுடை பரவல் எனப்படும்.

சமச் சீர் பரவலின் குணங்கள்

சமச் சீர் பரவலில், சராசரி, நடுவளவு, மற்றும் முகட்டளவு எல்லாம் ஒன்றாகவேயிருக்கும்.

A = சராசரி

M = நடுவளவு

Z = முகட்டளவு என வைத்துக் கொள்வோம்.

நடுவன் கீழ் கால்ம அளவிற்கும் (Q_1) மேல் கால்ம அளவிற்கும் (Q_3) மையப் புள்ளியில் இருக்கும். நடுவனுக்கும் கீழ் கால்ம அளவிற்கும் உள்ள இடைவெளி ($M - Q_1$) நடுவனுக்கும்

மேல் கால்ம அளவிற்கும் உள்ள இடைவெளிக்குச் சமமாக யிருக்கும். $(Q_3 - M)$

$$Q_3 - M = M - Q_1$$

நடுவனிலிருந்து கணிக்கும் நேர் விலக்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையும் எதிர் விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையும் சமமாகயிருக்கும்.

வளைகோட்டுருவம் சரியானதோர் மணியின் உருவமாகும்.

சீரின்மை (Skewness)

சமச் சீர்பு தன்மையிலிருந்துள்ள விலக்கமே, சீரின்மை எனப்படும். சமச்சீர்புடைப் பரவலில் எல்லாம் ஒற்றைப் பெருக்குச் சுழல் திறனான (Odd moments) 1, 3, 5 என்ற அளவுகள் யாவும் '0'.

ஏகதேச சமச்சீர்புடைப் பரவலில் 'β_1' எனப்படும் கெழு வெண் எப்போதும் நேர் அளவாகயிருக்கும், சமச்சீர்பிலிருந்து அதிக அளவில் வேறுபடும் பரவலில் 'β_1' என்ற அளவு அதிகமாக யிருக்கும். எனவே β_1ன் அளவையே கோணல் அளவாகக் கருதலாம்.

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \text{ என்பது தெரிந்ததே.}$$

$$\therefore \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

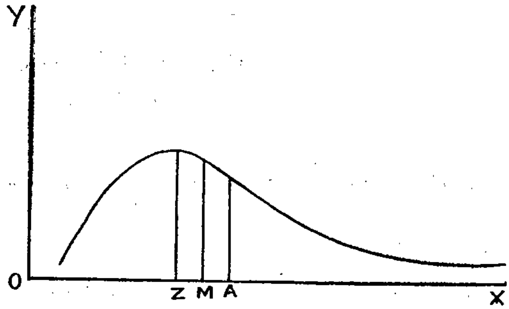
நேர் சீரின்மை (Positive Skewness)

நேர் சீரின்மைப் பரவலில் கீழ் கண்ட குணங்கள் இருக்கும்.

1. வளைகோட்டின் மிக அதிக உயரத்தின் வலது பக்கத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக யிருக்கும்.
2. முகட்டளவை விட நடுவனளவு அதிகமாக இருக்கும்.
3. சராசரி நடுவனளவைவிட அதிகமாகயிருக்கும். ஏறு வரிசையில் கீழ் கண்டவாறு அமையும்.

   (1) முகடு (2) நடுவன் (3) சராசரி

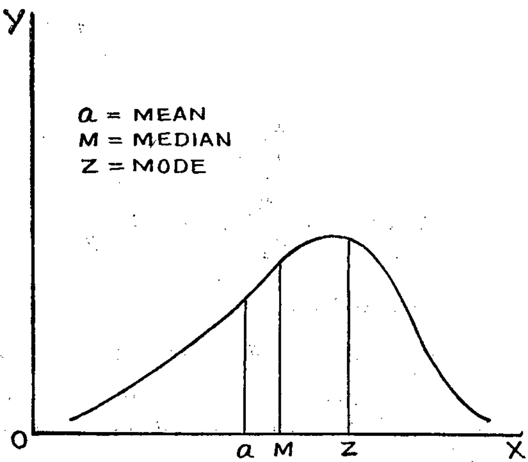
4. அலைவெண் வளைகோட்டின் வலது பக்கத்தில் ஒரு வால் பகுதி அமைந்திருக்கும்.



படம் 17
நேர் சீரின்மை

எதிர் சீரின்மை *(Negative Skewness)*

எதிர் கோணல் உள்ள இடங்களில் கீழ் கண்ட குணங்கள் இருக்கும்.



படம் 18
எதிர் சீரின்மை

1. வளைகோட்டின் மிக உயர்ந்த பகுதியின் இடது பக்கத்தில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக யிருக்கும்.
2. நடுவன் அளவு சராசரியை விட அதிகமாகயிருக்கும்.

3. மோட்டளவு நடுவனளவைவிட அதிகமாகயிருக்கும். ஏறு வரிசையாகயிருந்தால் அளவுகள் 1. சராசரி 2. நடுவன் 3. முகடு என்று அமையும்.

4. அலைவெண் வளைகோட்டின் இடது பக்கத்தில் ஒரு வால் பகுதி அமைந்திருக்கும்.

சீரின்மையின் கெழுவளவு (Co-efficient of Skewness)

சமச் சீர்புடைப் பரவலில் சராசரி, நடுவன், முகடு என்ற மூன்று அளவும் ஒன்றாகவே இணைந்திருக்கும். சீரின்மை பரவல்களில் அவைகள் ஒன்றோடொன்று இணைந்திரா. எனவே அவைகளின் வேறுபாட்டைச் சீரின்மையைக் குறிக்கும் அளவாக எடுக்கலாம். சீரின்மை அளவு = சராசரி — முகடு

நேர் கோணல் பரவலில் சராசரி, முகட்டை விட அதிகமாக இருக்கும் என்று கண்டோம். எனவே சராசரிக்கும் முகட்டள விற்கும் உள்ள வேறுபாடு நேராகயிருக்கும். ஆனால் எதிர் சீரின்மைகளில், முகடு சராசரியைவிட அதிகமாகயிருக்கும். எனவே அப்போது (சராசரி — முகடு) எதிரளவாகயிருக்கும்.

சீரின்மை ஒப்பளவு

'β' என்ற கெழுவளவோடு, சீரின்மைக்கான கெழுவளவாக 'C' என்ற கெழுவளவைக் கீழ்கண்டவாறு கணிக்கலாம்.

$$(1) \quad C = \frac{\text{சராசரி — முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

மேற்கண்ட வாய்பாடு கீழ் கண்டவாறு மாற்றப்படலாம்.

$$(2) \quad C = \frac{3\ (\text{சராசரி — நடுவன்})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

இது பரவல்களின் சீரின்மைக்கெழு எனப்படும். முன்பு சராசரிக்கும் முகட்டளவிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் சராசரிக்கும் நடுவனிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டைப் போல் மூன்று மடங்கு அதிகமாகயிருக்கும் என்று கண்ட காரணத்தினால் இரண்டாவது வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். சமச் சீர்புள்ள போது முகடு, சராசரி, நடுவன் எல்லாம் ஒன்றாகயிருப்பதால் அவைகள் தம்மில் உள்ள வேறுபாடு 0. எனவே C என்ற கெழு அளவின் மதிப்பு 0.

சராசரியின் மதிப்பு நடுவனளவைவிடவோ அல்லது முகட்டளவை விடவோ அதிகமாகயிருந்தால் சீரின்மை நேராகயிருக்கும். மாறாக சராசரி, நடுவன், முகட்டளவைவிடக் குன்றவாகயிருந்தால் சீரின்மை அளவு எதிராகயிருக்கும்.

(3) சீரின்மையின் கெழுவளவாக மூன்றாவது ஓர் அளவையும் கருதலாம்.

$$\frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{2Q}$$

$Q_3 - M = M - Q_1$ என்பது தெரிந்ததே.

இவற்றின் வேறுபாட்டை இவைகளின் கூட்டுத் தொகையின் விகிதமாக மாற்றலாம்.

$$\begin{aligned} \text{வேறுபாடு} &= (Q_3 - M) - (M - Q_1) \\ &= Q_3 - M - M + Q_1 \\ &= Q_3 + Q_1 - 2M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{கூட்டுத்தொகை} &= (Q_3 - M) + (M - Q_1) \\ &= Q_3 - M + M - Q_1 \\ &= Q_3 - Q_1 \\ &= 2Q. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{2Q}$$

இது பௌலியின் சீரின்மைஅளவு எனப்படும். (Bowley's measure) சமச் சீர்புடைய பரவலில் நடுவனுக்கும் கீழ் கால்ம அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாடு நடுவனுக்கும் மேல் கால்ம அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டிற்குச் சமமாகியிருக்கும். எனவே நடுவனிலிருந்து இங்கு கால்ம அளவிற்குள்ள வேறுபாட்டை இரு கால்ம அளவு இடைவெளி பாதியால் வகுத்துக் கிடைக்கும் அளவை சீரின்மை அளவாக எடுக்கலாம்.

தட்டை அளவு (Kurtosis) அல்லது கூரளவு

வளைகோட்டு உருவத்தின் கூர்மை அல்லது தட்டைத் தன்மையை கூர் என்று அழைக்கலாம். இது மோட்டுப் பகுதியில் உள்ள நபர்களில் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்துள்ளது.

இங்கு கூர்மை அல்லது தட்டை என்பதெல்லாம் பொது வளைகோட்டு அடிப்படையில் கூறுவதே. பொது வளைகோடு நல்லதோர் சமச் சீர்புடைக் கோடாகும். எனவே கூர் அளவுகள் எந்த அளவிற்கு ஓர் அலைவெண் வளைகோடு பொது வளைகோட்டோடு ஒட்டிச் செல்கிறது என்பதை விளக்குவதாகயிருக்கும்.

பல்வேறு கூர் அளவுகளில், 'கூர் அளவின் நூற்றுமான அளவுகளே' எளிய அளவுகளாகயிருக்கும். இது 90 சதவீத அளவிற்கும் 10 சதவீத அளவிற்குமிடையே உள்ள தூரத்தைக் கால்ம விலக்க அளவால் வகுத்துக் கிடைப்பதாகும்.

$$\text{நூற்றுமான கூர் அளவு} = \frac{\text{90 நூற்றுமான அளவு} - \text{10 நூற்றுமான அளவு}}{\text{கால்ம விலக்க அளவு}}$$

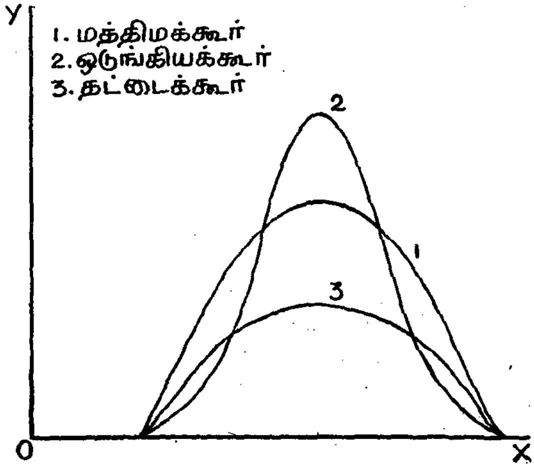
$$= \frac{P_{90} - P_{10}}{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

$$= 2(P_{90} - P_{10})/Q_3 - Q_1$$

சிறந்ததோர் பொது வளைகோட்டிற்குரிய நூற்றுமான கூர் அளவு 3. கூர்மை என்பது $\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ அல்லது $\frac{\mu_4}{\sigma^2}$ என விளக்கப் படும். இது β_2 வாகும். இயல்பரவலின் β_2 வின் அளவு 3. β_2 3க்கு அதிகமானால் பரவலின் வளைகோட்டின் உச்சி மிகக் கூராகவும், மாறாக β_2 வின் அளவு 3ஐ விடக் குறைவாக யிருந்தால் வளைகோட்டின் உச்சி தட்டையாகவும் இருக்கும்.

(1) **மெசா கூர் (Meso kurtic) மத்திமக்கூர்**

3 என்ற கூர் அளவு கொண்ட பரவலுக்குரிய வளை கோடு மெசா கூர்புடையதெனப்படும்.



படம் 19
கூர்மை அல்லது தட்டை

(2) **ஒடுங்கிய கூர் (Lepto Kurtic)**

பரவலின் நூற்றுமக் கூர் அளவு 3 க்கு அதிகமாக உள்ள பரவலின் வளைகோடு Lepto Kurtic *என்றழைக்கப்படும். பொது வளைகோட்டைவிட வளைகோட்டு உச்சி தட்டையாக இருக்கும்.*

(3) **தட்டைக் கூர் (Plat Kurtie)**

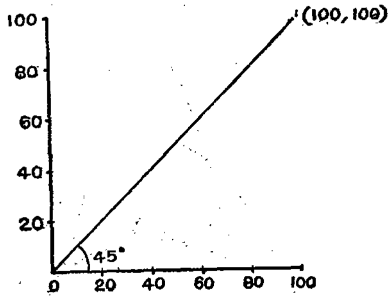
பரவலில் நூற்றுமக் கூர் அளவு 3. ஐ விட குறைவாக யிருந்தால் இத்தகைய பரவல் Plat Kurtie *எனப்படும். மேலும் வளைகோட்டின் உச்சி மிக மிகத் தட்டையாகயிருக்கும்.*

லாரன்ஸ் வளைகோடு (Lorenz Curve)

லாரன்ஸ் வளைகோடு என்பது சிதறலளவை வரைபடம் மூலம் கணிப்பதில் ஒரு முறையாகும். இது கூட்டு அலைவெண்ணிலிருந்து கணிக்கப்பெறும். கூட்டு அலைவெண்ணோடு இங்கு கூட்டு மதிப்பும் பயன்படும். இதில் அடங்கிய பல்வேறு செயல் முறைகள் கீழ் வருமாறு.

1. *முதலில் கொடுத்துள்ள மதிப்பின் அடிப்படையில் கூட்டு மதிப்புக்காண வேண்டும். மேலும் இம் மதிப்புகள் யாவும் நூற்றுமான அளவில் கொடுக்கப் பட வேண்டும்.*

2. *கூட்டு அலைவெண்கள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு நூற்று மான அளவில் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.*



படம் 20
லாரன்ஸ் கோடு

3. *கூட்டு மதிப்பின் நூற்றுமான அளவுகள் 'x' அச்சில் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.*

4. கூட்டு அலைவெண்ணின் நூற்றுமான அளவுகள் 'Y' அச்சில் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

5. இந்த இரண்டு அளவுகளிலும் குறைந்த மதிப்பு 'O' கூடுதல்மதிப்பு 100 என்பது தெரிந்ததே. இவ்விரு மதிப்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை இணைத்தால் கிடைக்கும் கோடு ஆதியிலிருந்து எதிர்திசையில் செல்லும் கர்ணமாகயிருக்கும்.

நன்மைகள்

சராசரி நிலையிலிருந்தும், இது எந்த அளவிற்கு விலகிச் செல்லுகிறது என்பது தெரிய வரும். சராசரி நிலையை (0,0) மற்றும் (100,100) என்ற அச்சுத்தூரங்களை இணைக்கும் மூலைவிட்ட கோடு விளக்கும்.

கீழே கொடுத்துள்ள பரவலுக்கு லாரன்ஸ்கோடு வரையவும்

தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	மாதத்திற்கான மொத்த ஊதியம் ரூபாய்
3	2000
7	3000
12	4000
15	5000
13	6000
50	20000

தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	கூட்டு அலைவெண்	கூட்டு அலைவெண் எண்ணிக்கைச் சதவீதம்
3	3	6
7	10	20
12	22	44
15	37	74
13	50	100

ஊதியம் ரூ.	கூட்டுஊதியம் ரூ.	கூட்டு ஊதியச் சதவீதம்
2000	2000	10
3000	5000	25
4000	9000	45
5000	14000	70
6000	20000	100

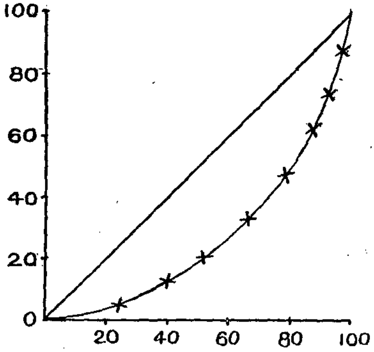
தொழிலாளர்களின் நூற்றுமான அளவுகள்	ஊதியத்தின் நூற்றுமான அளவுகள்
6	10
20	25
44	45
74	70
100	100

மேலே உள்ள விவரங்களை X மற்றும் Y என்ற அச்சுகளின் கீழ் கண்டவாறு குறிக்கப்படலாம்.

X:	6	20	44	74	100
Y:	10	25	45	70	100

புள்ளிகளைக் குறித்த பின்னர் அவற்றை ஓர் ஒழுங்கான வளை கோட்டினால் இணைக்கவும். இவ்வளை கோட்டிலிருந்து, 25% அல்லது 50% அதிகமான நபர்கள் பெறும் கூலியின் நூற்றுமானத்தையும் கணிக்கலாம்.

அச்சில் 25%, மற்றும் 50% என்ற நிலைகளுக்குப் பொருத்தமான இடத்திலிருந்து செங்குத்துக் கோடு வரைந்து, வளை கோட்டை வெட்டும்படிச் செய்யலாம். வளைகோட்டில் இவ்



படம் 21
லாரன்ஸ் வளைகோடு

வெட்டப்பட்ட இடங்களுக்கு ஏற்ற 'Y' அளவுகள் 25% மற்றும் 50% தொழிலாளர்கள் பெறும் ஊதியத்தின் நூற்றுமான அளவைக் குறிக்கும்.

பயிற்சி

(1) கீழேயுள்ள விவரங்களின் கால்ம வீச்சளவைக் (Quartile Deviation) காண்க.
52, 55, 57, 49, 54, 61, 64, 58, 63, 61.

(2) கீழேயுள்ள பரவல்களில் இரு கால்ம அளவுகளின் இடைவெளி பாதி அளவைக் காண்க.

அளவு	20	30	40	50	60	70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	7	20	8	4	6

(3) கீழேயுள்ள விவரங்களின் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்க.
132, 104, 166, 143, 175, 158, 179, 189, 125, 140.

(4) கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களின் திட்டவிலக்கத்தையும், விலக்கத்துணையெண் அல்லது விலக்க விழுவெண்ணையும் காண்க.

(1) 28, 39, 45, 60, 65.

(2) 32, 53, 49, 28, 75.

(3) 280, 580, 350, 750, 625.

(5) கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களின் திட்ட விலக்கத்தையும், விலக்கத்துத் துணையெண் அல்லது விலக்க கெழுவெண்ணையும் காண்க.

	x	f		x	f
(i)	25	3	(ii)	10	5
	35	4		20	8
	45	5		30	9
	55	8		40	7
	65	5		50	5
				60	6

(6) கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களின் திட்ட விலக்கத்தையும் துணையெண் அல்லது விலக்க கெழுவெண்ணையும் காண்க.

	x	f		x	f
(i)	0 - 10	4	(ii)	0 - 25	11
	10 - 20	7		25 - 50	15
	20 - 30	8		50 - 75	28
	30 - 40	9		75 - 100	12
	40 - 50	5		100 - 125	14
	50 - 60	7			

அத்தியாயம் III

ஒட்டுறவு அல்லது உடன் தொடர்பு அல்லது இடை உறவு

(Correlation)

இது வரையில் நாம் ஒரே நேரத்தில் ஒரே பண்பை மாத்திரம் கொண்ட கோர்வையைப்பற்றிப் படித்தோம். நமது எடுத்துக் காட்டுகளில் மக்களின் எடை அல்லது உயரம் அல்லது மாணவர்கள் பெற்றுள்ள மதிப்பெண் அல்லது சோதனை மூலம் கிடைத்த மகசூல் என்ற இவைகளில் ஏதாவது ஒன்றைப் பற்றி மாத்திரம் ஒரு நேரத்தில் கவனித்தோம். ஆனால் நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் ஒரே நேரத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட குணப்பண்புகளைப் பற்றிக் கவனிக்க வேண்டி வரும். எடுத்துக் காட்டாக மக்களின் எடையையும் உயரத்தையும் ஒருங்கு சேர கவனிப்பதற்கு ஒப்பாகும். அல்லது உரத்தின் எடையையும் மக சூலின் எடையையும் கவனிப்பதற்கொப்பாகும். சில வேளைகளில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மூன்றோ அல்லது மூன்றிற்கு மேற்பட்ட பண்புகளையோ அல்லது திரிபு அளவுகளையோ கொண்டதாக இருக்கும்.

உடன் தொடர்பு

பல திரிபுகளின் மதிப்புகள் ஒன்றோடு ஒன்று இணைந்த தொடர்புடையதாகும். உதாரணமாக ஒரு மனிதனின் எடை அவன் உயரத்தைப் பொறுத்திருக்கலாம். அல்லது ஒரு மனிதனின் உயரமும் எடையும் அவன் வயதைப் பொறுத்திருக் கலாம். வயலிலிருந்து கிடைக்கும் மகசூலின் அளவு வயலுக்கு இட்ட உரத்தின் அளவைப் பொறுத்திருக்கலாம். இரண்டும் அதற்கும் மேற்பட்ட பண்புகளின் தொடர்பு, உடன் தொடர்பு என்று கூறலாம். சில வேளைகளில் இத்தகைய தொடர்பு உடன் வேறுபாடு அல்லது உடன் வேற்றுமை அல்ல்து உடன் மாற்றம் எனப்படலாம்.

தொடர்பு

தொடர்பு என்ற சொல்லை முப்பொருளில் விளக்கலாம்.

1. ஒன்றுக்கொன்று உள்ள பரஸ்பர உறவு
2. காரண காரிய உறவு
3. பொது உறவு

பரஸ்பர உறவு அல்லது பரிமாற்ற உறவு

ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் விலை என்று இரு பண்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று பரிமாற்ற உறவு உடையது. பொருளின் விலை இறங்கும்போது, அதன் தேவை அதிகரிக்கிறது. சில வேளை விலைகளில் அதன் தேவை அதிகரிக்கும்போது விலையும் அதிகரிக்கிறது. எப்போதாவது, ஒன்றின் மதிப்பில் வேறுபாடு தோன்றும் போது மற்றொன்றின் மதிப்பிலும் வேறுபாடு காணப்படும். ஆகவே ஒன்றின் மதிப்பின் மாறுபாடு மற்றொன்றின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுபாட்டைப் பொறுத்தது.

2. காரண காரிய உறவு (Cause and Effect)

நிலத்திற்கு இடுகின்ற உரத்தின் அளவு அதிகரிக்கும்பொழுது பயிரின் மகசூலும் அதிகரிக்கும். இங்கு உற்பத்தியின் அதிகரிப்பு உரத்தின் அதிகரிப்பினால் விளைந்தது. மழை அதிகரிப்பும், மகசூலை அதிகரிக்கும். இவ்விடங்களிலேல்லாம் காரண காரிய உறவு நிகழ்கின்றது.

3. பொது உறவு (General Relationship)

உணவு உற்பத்தியின் அதிகரிப்புப் பருத்தி உற்பத்தியின் அதிகரிப்போடு இணைந்திருக்கலாம். அவைகள் தம்மில் நேரடி தொடர்பு இல்லாமல் இருக்கலாம். என்றாலும், மழையளவு, நெல், பருத்தி இதர விவசாயப் பொருள்களின் உற்பத்தி அதிகரிப்புக்குக் காரணமாய் இருக்கலாம். இவ்விடங்களில், ஒன்றின் உற்பத்தி, மற்றொன்றின் உற்பத்தியைச் சார்ந்திருக்கிறது. என்றாலும், அவை யாவும் மழை வளத்தைப் பொறுத்திருக்கிறது. ஒன்றோடொன்று தொடர்பில்லாமல், ஆனால் அதே சமயத்தில் வேறொன்றோடு பொது தொடர்புடைய உறவு பொது உறவு என அழைக்கப்படும்.

எளிமையைப் பொறுத்தும், இலகுவில் புரிந்து கொள்வதற்காகவும், நாம் இரு பொருள்களைப் பற்றி மாத்திரம்

படிப்போம். நாம் படிப்பதற்கென எடுத்துக் கொண்ட இரு திரிபளவுகளில் ஒரு அளவு சுய அளவு என்றும் (independent) அடுத்த அளவு சார்பளவு (dependent) என்றும் கூறலாம். பெயரிலிருந்து சார்பளவின் மதிப்பு, சுய அளவின் மதிப்பைச் சார்ந்துள்ளது எனத் தெரிகிறது. சுய அளவில் ஏற்படும் எந்த ஒரு மாற்றமும் அதற்கு இணையான மாற்றத்தைச் சார்பளவில் கொண்டதாக இருக்கும். திரிபளவுகளின் மதிப்பில் இத்தகைய தோர் தொடர்பு இருக்குமானால் சுய அளவை 'x' என்றும் சார்பளவை 'y' என்றும் குறியிட்டு வழங்கலாம்.

உடன் தொடர்பின் வகை

நேர்த் தொடர்பென்றும், எதிர்த் தொடர்பென்றும் இரு வகைத் தொடர்பு உண்டு.

நேர்த் தொடர்பு (Positive Correlation)

சுய அளவின் மதிப்பு, அதிகரிக்குந்தோறும் அதற்கேற்ற சார்பளவின் மதிப்பும் அதிகரிக்குமானால் அல்லது சுய அளவின் மதிப்புக் குறையும்போது அதற்கு இணையான சார்பளவின் மதிப்பும் குறையுமானால் அத்தொடர்பு நேர் தொடர்பு என்றழைக்கப்படும். இங்கு இத்திரிபுகளில் ஏற்படும் மாற்றம் ஒரே திசையை நோக்கிச் செல்வதாக இருக்கும். அதாவது இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் அதிகரிக்கவோ அல்லது இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் குறையவோ செய்யும். இது நேர்த் தொடர்பு எனப்படும். பொருள்களின் விலையும், வழங்கலும் இத் தொடர்புக்கு நல்ல தொரு எடுத்துக்காட்டு ஆகும். பொருள்களின் விலை ஏறுந் தோறும் சந்தைக்கு வரும் அப்பொருளின் அளவும் அதிகரிக்கும். இதுபோல், பொருளின் விலை இறங்குந்தோறும், பொருளின் வரவின் நிலைமையும் குறையும்.

எதிர்த் தொடர்பு (Negative Correlation)

சுய அளவின் மதிப்பு ஏறும்போது, சார்பளவின் மதிப்புக் குறையுமானாலும் அல்லது சுய அளவின் மதிப்புக் குறையும் போதும் சார்பளவின் மதிப்பு ஏறுமாயினும் அத்தொடர்பு எதிர்த் தொடர்பு எனப்படும். இந்த மாற்றங்கள் எதிர்த் திசையில் நடைபெறுகின்றன. எனவே இவை எதிர்த் தொடர்பு எனப் படும். பொருளின் விலையும் தேவையின் அளவும் இதற்கு நல்லதொரு எடுத்துக்காட்டு. ஏனெனில் பொருளின் விலை ஏறுந்தோறும் தேவையின் அளவு குறைவதும், பொருளின் விலை இறங்குந்தோறும், தேவையின் அளவு ஏறுவதும் தெரிந்ததே.

சம நேர் தொடர்பு (Perfect positive Correlation)

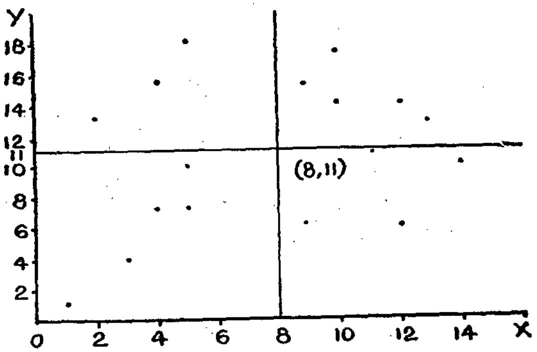
வெப்ப அளவு வேறுபாட்டிற்கும், ஒரு இரும்பு கம்பியின் நீளத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு சம நேர்பாட்டுத் தொடர்புக்குச் சரியான ஒரு எடுத்துக்காட்டாகும். வெப்பம் அதிகரிக்குந் தோறும் இரும்புக் கம்பியின் நீளம் அதிகரிக்கும் என்பது தெரிந் ததே. இது நேர்த் தொடர்பைக் குறிக்கும். வெப்பத்தின் அளவு ஒரு பாகை அதிகரிக்குந்தோறும், இரும்பு கம்பியின் நீளமும் ஒரு குறிப்பிட்ட அள்வு அதிகரிக்குமென்று தெரிந்ததே. சுய அளவில் உள்ள ஒரே சீரான மாற்றத்திற்கு ஏற்ப சார்பளவிலும் ஒரே சீரான மாற்றம் ஏற்படுவது உண்டு. இதை வேறுவித மாகக் கூறினால், இரு அளவுகளில் ஏற்படும் வேறுபாட்டு விகிதம் ஒன்று போன்றது அல்லது ஒரே சீரானது. இவ்வாறு ஒன்றிற் கொன்று இணையாக சமவேறுபாட்டுத் தொடர்பு இருக்குமானுல் அதை சம நேர்பு தொடர் எனக் கூறி அதன் அளவை *(+1)* என்று குறிப்பிடலாம். மாறாக, இதே போன்ற, ஆனால் எதிர் திசையினாலான மாற்றம் அல்லது வேறுபாடு சுய சார்பளவுகளி லும் இருக்குமானால் அத்தொடர்பைச் சம எதிர்த் தொடர்பு என அழைத்து *(—1)* என்ற அளவால் குறிப்பிடலாம். ஒரு நிலை யான வெப்ப நிலையில் காற்றின் அழுத்தம் ஒரு குறிப்பிட்ட வேகத்தில் அதிகரிக்குந் தோறும், காற்றின் பரிமாணம் ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் குறையும். ஏனெனில், அழுத்தம் மற்றும் பரிமாணம் என்ற இரு அளவுகளின் பெருக்குத் தொகை எப்போதும் ஒன்றாகவே இருக்கும். இதிலிருந்து உடன் தொடர்பின் அளவு *—1* லிருந்து *'0'* வழியாக *+1* வரைச் செல்லும் என்பது தெரிகிறது. இரு பொருள்கள் தம்மில் எவ் வித தொடர்பும் இல்லாதிருந்தால் உடன் தொடர்பின் அளவு *'0'* என்று இருக்கும். உடன் தொடர்புபற்றி கீழ் கண்ட முறைகளில் ஏதாவது ஒன்றின் மூலம் படிக்கலாம்.

1. சிதறல் விளக்கப் படம் *2.* உடன் தொடர்பு வரை கோடு *(3)* கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு கெழு எண்

முதலிரண்டும் மூலமாகவும், அதிலிருந்து உடன் தொடர் பின் தன்மையைக் காணலாம். உடன் தொடர்பு நேரானதா அல்லது எதிரானதா என்பதை உணரலாம். படத்திலிருந்து உடன் தொடர்பின் தன்மையை மாத்திரம் அறிய முடியுமே யொழிய அளவிட்டுக் கூற முடியாது. ஆனால் உடன் தொடர்பு பரவலின் தொடர்பளவை எண்ணிக்கையளவில் குறிப்பிடுவ தாகும்.

சிதறல் படமும் உடன் தொடர்பின் வரைபடமும்

இது இரு திரிபுகளிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பை அறிவதற்குரிய எளியதோர்முறையாகும். படத்திலிருந்து, சிரமமின்றி இரு திரிபுகளிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பு நேரானதா அல்லது எதிரானதா என்று எளிதில் கூறலாம். x மற்றும் y என்ற இருவேறு இணையான திரிபுகளை xy என்ற தளத்தில் குறிக்கலாம். பல்வேறு உறுப்புகளின் பல்வேறு புள்ளிகள் படத்தில் பல இடங்களில் சிதறியிருப்பதைக் காணலாம். எனவே இது சிதறல் படம் எனப்படும். இத்தகையப் படம் இரு திரிபுகளின் மதிப்புகளை விளக்குவதால் இது இரு திரிபு படம் (Bivariate diagram) எனப்படும்.



படம் 22

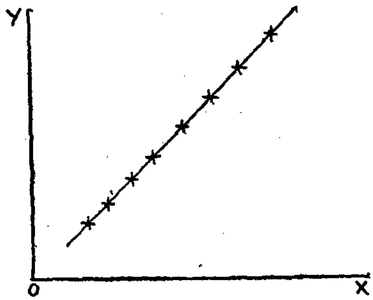
சிதறம் படம்

புள்ளிகள் யாவும் ஒரு தெளிவானதோர் கோட்டைச் சுற்றிலும்இருக்குமானால் அத்தகைய கோடு தொடர்புகோடு (Regressive curve) எனப்படும். அப்போது இரு திரிபுகளிடையே ஓர் உறவு உளது எனலாம். உறவுகோடு நேர்கோடாகயிருந்தால் உறவு நேர்கோட்டுமுறை அல்லது நீட்டுப்போக்கில் [lineer] உள்ளது எனலாம்.

1. சம நேர் தொடர்பு (Positive Perfect correlation)

படத்தில் குறிக்கப்பட்ட பல புள்ளிகள் இணைந்து இடமிருந்து வலமாக மேல் நோக்கிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடாக

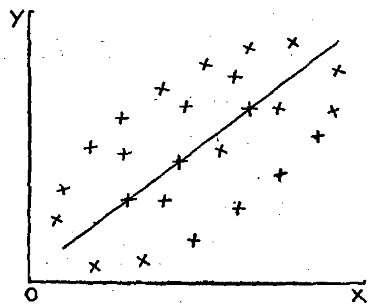
அமைந்தால் அது சம நேர்தொடர்பு எனப்படும். அதற்கான கோடு படத்தில் கொடுத்துள்ளது போலிருக்கும்.



படம் 23
சம நேர் தொடர்பு

2. நேர் தொடர்பு (Positive correlation)

எல்லா புள்ளிகளும் இடமிருந்து வலமாக மேலே நோக்கிச் செல்லும் கோட்டின் மேல் இல்லாமல் இருமருங்கிலும் புள்ளிகள் இருக்குமானால் தொடர்பு நேர் தொடர்பு எனப்படும். படம் கீழ் கண்டவாறிருக்கும்.

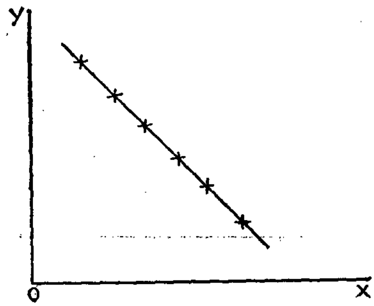


படம் 24
நேர் தொடர்பு

3. சம எதிர் தொடர்பு (Negative perfect correlation)

சிதறல் படத்தில் உள்ள புள்ளிகள் அல்லது குறியீடுகள் எல்லாம் இடமிருந்து வலமாக கீழ் நோக்கிச் செல்லும் ஓர்

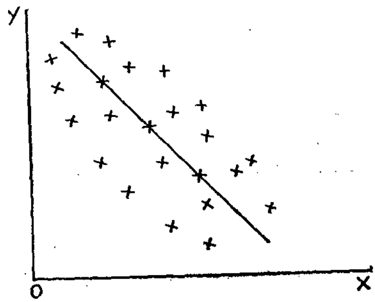
கோட்டில் அமையுமானால் உடன் தொடர்பு சம எதிர் தொடர்பு எனப்படும். அதற்குரிய படமும் கீழ் கண்டவாறிருக்கும்.



படம் 25
சம உதிர் தொடர்பு

4. எதிர் தொடர்பு (Negative correlation)

எல்லா புள்ளிகளும் முன் போல் இடமிருந்து வலமாக மேலிருந்து கீழ் நோக்கிச் செல்லும் கோட்டில் அமையாமல் கோட்டிற்கு இருமருங்கிலும் சிதறியிருக்குமானால் அது எதிர் தொடர்பு எனப்படும். படமும் கீழிருப்பதுபோல் தோன்றும்.

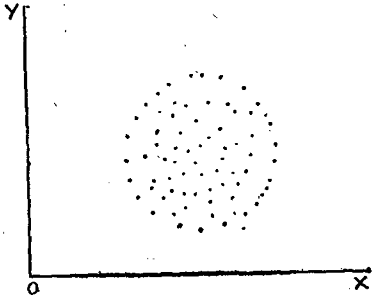


படம் 26
எதிர் தொடர்பு

தொடர்பின்மை அல்லது சூன்யத் தொடர்பு (No correlation)

வெவ்வேறு குறிகள், ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையாமல், தளத்தில் எல்லா பாகங்களிலும் ஒன்று போல் படத்தில் காட்டி

யிருப்பது போல் சிதறியிருக்குமானால், அது சூன்யத் தொடர்பைக் குறிக்கும்.



படம் 27
சூன்ய தொடர்பு

உடன் தொடர்பின் தன்மை

வேறு ஒரு முறையிலும் படத்திலிருந்தும் உடன் தொடர்பின் தன்மையை அறியலாம்.

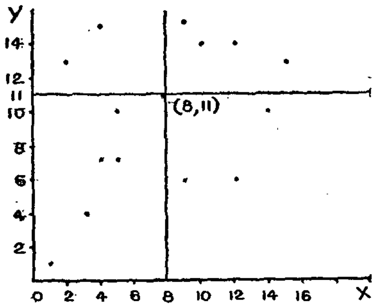
x மற்றும் y என்ற இரு திரிபுகளின் மொத்த மதிப்புக் கண்டு பிடித்து, பின்னர் அவற்றிற்கான $\bar{x}$ மற்றும் $\bar{y}$ என்ற சராசரி அளவையும் காணலாம். சிதறல் படத்தில் $(\bar{x}, \bar{y})$

$-a \times b = -ab$ (இரண்டாவது)	$a \times b = ab$ (முதலாவது)
$-a \times -b = ab$ (மூன்றாவது)	$a \times -b = -ab$ (நான்காவது)

படம் 28

என்பதற்குரிய புள்ளியையும் குறிக்கலாம். பிறது $\bar{x}$, $\bar{y}$, என்ற புள்ளி வழியாக x அச்சிற்கும் y அச்சிற்கும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்து புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலும் நீட்டி, xy

சமதளத்தை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம். ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு கால்மப் பகுதி எனப்படும். இக்கால்மப் பகுதிகள்



படம் 29

சிதறல் படம்

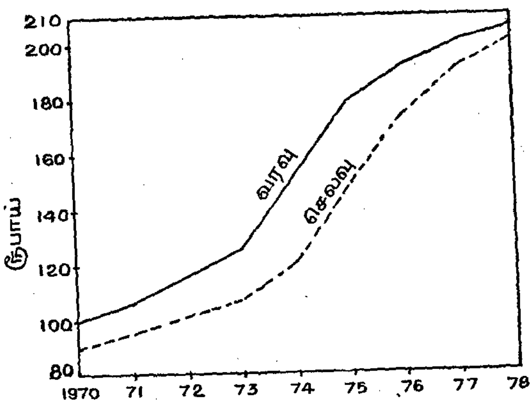
முறையே முதல் கால்மப் பகுதி, இரண்டாம், மூன்றாம் நான்காம் கால்மப் பகுதி எனப்படும்.

ஒவ்வொரு கால்மப் பகுதியிலும் உள்ள புள்ளிகளை எண்ண வேண்டும். முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மப் பகுதிகளில் உள்ள புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை இரண்டாம் மற்றும் நான்காம் கால்மப் பகுதிகளில் உள்ள மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாகயிருந்தால், அது நேர் தொடர்பைக் குறிக்கும். மாறாக முதல் மற்றும் மூன்றாம் கால்மப் பகுதிகளில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை இரண்டாம், நான்காம் பகுதிகளில் உள்ள புள்ளிகளை விடக் குறைவாக இருந்தால் அது எதிர் தொடர்பைக் குறிப்பதாகும்.

உடன் தொடர்பின் வரைபடம்

திரிபுகளின் அளவுகள் கால வாரியாக கொடுக்கப்படும் போது உடன் தொடர்பு வரை படத்தைக் கையாளலாம். காலத்தை x அச்சிலும் திரிபுகளின் அளவை y அச்சிலும் குறிக்கலாம். கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களையும் அதற்குரிய வரை படத்தையும் கவனிப்போம்.

ஆண்டு	வருவாய் ரூ.	செலவு ரூ.
1970	100	90
1971	105	95
1972	115	100
1973	125	115
1974	150	120
1975	178	150
1976	190	175
1977	200	190
1978	205	200



படம் 30
தொடர்பு கோடு

A வருவாய் வரை படம், *B* செலவின் வரைபடம்

வருவாயும் செலவும் Y அச்சில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. வருவாய்க்குரிய எல்லாப் புள்ளிகளையும் ஓர் ஒழுங்கான கோட்டினால் இணைக்கலாம். இது போன்று வேறு ஒரு கோட்டினால் செலவினத்திற்குரிய எல்லாப் புள்ளிகளையும் இணைப்போம்.

இவ்விரு திரிபுகளின் கோடுகள் மிக இணைபோல் ஒரே திசை நோக்கிச் செல்லுமானால், இவ்விரு திரிபுகளும் நேர் தொடர்புடையவை எனலாம். மாறாக இவ்விரு திரிபுகளின் வரைகோடுகள் எதிர் திசை நோக்கிச் செல்லுமானால் இவ்விரு திரிபுகளும் எதிர் தொடர்புடையவை எனக் கூறலாம். முன்பு கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டில், வருவாயும், செலவும் ஒரே திசை நோக்கிச் செல்லுகின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் ஓர் இனத்தில் வளைகோடு உயர்ந்து காணப்படும் போது அக்காலத்திற்குரிய இதர கோடும் உயர்ந்து காணப்படும். அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் ஓர் இனத்தின் வளைகோடு தாழ்ந்து காணப்படும் போது, அதே காலத்தில் அடுத்த கோடும் தாழ்ந்து காணப்படும். எனவே இவ்விரு திரிபுகளும் நேரடித் தொடர்புடையவை. உடன் தொடர்பு வரைபடங்கள், திரிபுகள் தம்மில் உள்ள தொடர்பின் தன்மையை உத்தேசமாக விளக்குமேயல்லாது உடன் தொடர்பின் அளவைத் தராது.

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு ஓர் உடன் தொடர்பு படம் வரைந்து காணலாம்.

ஆண்டு	ஏற்றுமதி (மதிப்புக் கோடி ரூபாயில்)	இறக்குமதி (டன்னில்)
1970	100	80
1971	150	70
1972	175	65
1973	200	60
1974	250	50
1975	300	45

உடன் தொடர்பின் கெழுவெண்

இரு திரிபுகளின் உறவின் அல்லது தொடர்பின் ஆழத்தை அறிவதற்கு உடன் தொடர்பின் கெழுவெண் கணிக்கப்படுகிறது. உடன் தொடர்பின் துணையெண் அல்லது கெழுவெண் உடன் தொடர்பின் அளவை அல்லது தன்மையை எண்ணிக்கையளவில் கொடுக்கிறது. **கால் பியர்ஸ்சனின்** உடன் தொடர்பின் கெழுவெண் கீழ்வரும் வாய்பாட்டின் அடிப்படையில் கணிக்கப்பெறுவதாகும்.

$$r = \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{N\sigma x \times \sigma y}$$

மேலே உள்ள வாய்பாடு, கீழேயுள்ள சில கோட்பாடுகளின் அடிப்படையில் உருவானது.

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு திரிபுகளின் தொடர்பு நேர்கோட்டுத் தன்மையிலிருக்கும்.

(2) இவ்விரு திரிபுகளின் மதிப்புகளின் மாற்றத்தைத் தோற்றுவிக்கும் காரணிகள் ஒன்றுக்கொன்று காரண காரிய உறவுடையது.

(3) இவ்விரு திரிபுகளைத் தாக்கும் காரணங்கள் இரண்டிற்கும் பொதுவானவை

விதியில் காணப்படும் குறியீடுகளின் விளக்கம் கீழ்வருமாறு

(1) 'r' உடன் தொடர்பின் துணையெண் அல்லது கெழுவெண்

(2) x மற்றும் y என்ற இணைமதிப்புகள், x மற்றும் y என்ற இரு திரிபுகளைக் குறிப்பதாகும்.

(3) $\bar{x} = x$ என்ற திரிபின் சராசரியாகும்.

(4) $\bar{y} = y$ என்ற திரிபின் சராசரியாகும்.

(5) $\sigma x = x$ என்ற திரிபின் மூலவிலக்கமாகும்.

$$\sigma x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^2}{n}}$$

(6) $\sigma y = y$ என்ற திரிபின் மூலவிலக்கமாகும்.

$$\sigma y = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y - \bar{y})^2}{n}}$$

(7) n = உறுப்பு எண்ணிக்கை அல்லது உறுப்பு இணை களின் எண்ணிக்கை

முன்னர் உள்ள வாய்பாடு சுருங்கும் போது கீழ் கண்ட வாறு மாறும்.

$$(1) \quad r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sigma x \times \sigma y}$$

மேலே உள்ள வாய்பாட்டில் σx, σy என்பவற்றிற்கான வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தலாம். வாய்பாடு கீழ்கண்ட வாறு மாறும்.

$$(2) \quad r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N} \times \frac{\Sigma (y - \bar{y})^2}{N}}}$$

$$(3) \quad r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2 \, \Sigma (y - \bar{y})^2}{N^2}}}$$

$$= \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\frac{N \sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \, (y - \bar{y})^2}}{N}}$$

$$(4) \quad r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \, (y - \bar{y})^2}}$$

பொதுவாக $\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})$ என்பது பெருக்குச் சுழல் திறன் எனக் கருதப்பட்டு P_{11} என்று குறிக்கப்படும். எனவே $\frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N}$ என்பது சராசரி பெருக்குச் சுழல் திறன் எனப்படும்.

$$r = \frac{P_{11}}{\sigma x \sigma y}$$

இதை ஒரு எடுத்துக்காட்டு மூலம் காண்போம். கீழே கொடுத்துள்ள விபரங்களுக்கு உடன் தொடர்பு கெழுவெண் கணிக்கவும்

எடை (கிராம்)	உயரம் (செ.மீ)
5	7
4	6
6	9
3	5
2	3
20	30

'*r*' கணிப்பதில் உள்ள பல்வேறு செயல்முறைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பிரிவு 1

(1) இணை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= n = 5$

(2) சராசரி $= \bar{x} = 20/5 = 4$ கிராம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{20}{5} = 4.$$

*y*யின் சராசரி $= \bar{y} = 30/5 = 6$ செ.மீ.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

பிரிவு 2

ஒவ்வொரு *x* மதிப்பிற்கும், சராசரிக்குமுள்ள வேறு பாட்டைக் கணிக்கவும். $(x - \bar{x})$

(2) இது போன்று ஒவ்வொரு 'y' மதிப்பிற்கும் y யின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கணிக்கவும் $(y-\bar{y})$

(3) 'x'க்கும் xன் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டையும், yயின் மதிப்பிற்கும் 'y' ன் சராசரிக்குமுள்ள வேறு பாட்டையும் பெருக்கி, பெருக்கற் பலன் காண வேண்டும். முதல் 'x'ன் வேறுபாட்டிற்கும், முதல் 'y' ன் வேறு பாட்டிற்கும் உள்ள பெருக்குப் பலன் காண வேண்டும். இது போல், இரண்டாம் xற்கும், இரண்டாம் yன் விலக்கத்திற்கும், உள்ள பெருக்கற் பலன் காண வேண்டும். இவ்வாறு தொடர்ந்து எல்லா விவரங்களின் விலக்கங்களின் பெருக்கற் பலன் காண வேண்டும்.

$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})$
1	1	1
0	0	0
2	3	6
−1	−1	1
−2	−3	6
0	0	14

$$\therefore \text{ பெருக்குச் சுழற் திறன்} = \Sigma\frac{(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{n}$$

$$= \frac{14}{5} = 2.8$$

பிரிவு 3

(1) Xன் திட்ட விலக்கம் கணிக்கவும்

$$\sqrt{\frac{\Sigma\,(x-\bar{x})^2}{N}}$$

$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
1	1
0	0
2	4
–1	1
–2	4
	10

$$\sigma x = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.4$$

2. yயின் திட்ட விலக்கம் கணிக்கவும்

$$\sqrt{\frac{\Sigma (y - \bar{y})^2}{N}}$$

$(y - \bar{y})$	$(y - \bar{y})^2$
1	1
0	0
3	9
–1	1
–3	9
	20

$$\sigma\, y = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

இரு திரிபுகளின் திட்ட விலக்கங்களின் பெருக்கற் பலன்

$$\sigma x \;\sigma y = \sqrt{2} \times 2$$

பிரிவு 4

(சராசரி) பெருக்குச் சுழற் திறனை இரு திரிபுகளின் திட்ட விலக்கங்களின் பெருக்கற் பலனால் வகுக்கவும்.

$$r = \frac{2.8}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{2.8}{1.4 \times 2} = 1.$$

இதிலடங்கிய பல்வேறு செயல் முறைகளைக் கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுத்துள்ளதுபோல் சுருக்கி எழுதலாம்.

x (1)	y (2)	$(x-\bar{x})$ (3)	$(x-\bar{x})^2$ (4)	$(y-\bar{y})$ (5)	$(y-\bar{y})^2$ (6)	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ (7)
5	7	1	1	1	1	1
4	6	0	0	0	0	0
6	9	2	4	3	9	6
3	5	−1	1	−1	1	1
2	3	−2	4	−3	9	6
20	30	0	10	0	20	14
சரா சரி. 4	6	0	2	0	4	2.8

3, 4, 5, மற்றும் 6 என்ற நிரை வரிசைகள் 'x' திட்ட விலக்கமும் (σx)ன் y திட்டவிலக்கமும் (σy) கணிப்பதற்

காக உருவாக்கப்பட்டன என்பது தெளிவு. இங்கு திட்ட விலக்கம் கணிப்பதற்குரிய அடிப்படை விதியே கையாளப்பட்டுள்ளன என்பதும் தெளிவு.

ஆனால் திட்ட விலக்கங்கள் சுருக்கு வழிகளிலும் கணிக்கப் படும் என்பது தெரிய வரும். கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்த நேராகவே திட்ட விலக்கங்களைக் கீழ் வரும் வாய்பாட்டின் மூலம் கணிக்கலாம். இதற்கு x^2, y^2 என்ற இரு அளவுகள் தேவை. இவற்றால் 3, 4, 5 மற்றும் 6 என்ற நான்கு நிரை வரிசைகளையும் அகற்றி விடலாம். இதில் x^2 மதிப்பு $(x-\bar{x})$ மற்றும் $(x-\bar{x})^2$ என்ற இரு வரிசைகளையும் அகற்றிவிடும். இது போன்று y^2 என்ற ஒரு வரிசை $(y-\bar{y})$ மற்றும் $(y-\bar{y})^2$ என்ற இருவரிசைகளையும் அகற்றிவிடும். 7வது வரிசையாகிய $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ என்ற வரிசை இலகுவாக (xy) என்ற ஒரு வரிசையால் எளிமையைக் கருதி அகற்றப்படலாம். இதை எவ்வாறு செயல் படுத்தலாம் என்று காண்போம்.

7வது வரிசை $= (x-\bar{x})(y-\bar{y})$

7வது வரிசையின் மொத்தம் $= \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

இங்கு $\bar{x}$ம் $\bar{y}$ம் நிலையானவை. எனவே,

$$= \Sigma xy - \bar{y}\Sigma x - \bar{x}\Sigma y + \Sigma \bar{x}\bar{y}$$

$$= \Sigma xy - \bar{y}N\bar{x} - \bar{x}N\bar{y} + \Sigma \bar{x}\bar{y}$$

$$= \Sigma xy - N\bar{x}\bar{y} - N\bar{x}\bar{y} + N\bar{x}\bar{y}$$

$$= \Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}$$

$$\therefore \quad r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2}\ \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N} - \bar{y}^2}}$$

$$= \frac{\Sigma xy - N\bar{x}.\bar{y}}{N\sqrt{\left(\frac{\Sigma x^2}{N} - N\bar{x}^2\right)\left(\frac{\Sigma y^2}{N} - N\bar{y}^2\right)}}$$

$$= \frac{\Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}}{N\sqrt{\frac{(\Sigma xy^2 - N\bar{x}^2)(\Sigma y^2 - N\bar{y}^2)}{N^2}}}$$

$$= \frac{\Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}}{N\frac{\sqrt{(\Sigma x^2 - N\bar{x}^2)\ (\Sigma y^2 - N\bar{y}^2)}}{N}}$$

$$= \frac{\Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x^2 - N\bar{x}^2)\ (\Sigma y^2 - N\bar{y}^2)}}$$

or $$\frac{\Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma xx - N\bar{x}\bar{x})\ (\Sigma yy - N\bar{y}\bar{y})}}$$

மேலே கொடுத்த விரிவாக்கம் நிலைமையை நன்கு விளக்கி விடும்.

தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு காரணியும் பகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கு இணையானதாகும். காணப்படும் வேறு பாடு எல்லாம் தொகுதியில் yக்கு பதிலாக xஐயும் $\bar{y}$க்கு $\bar{x}$ பயன் படுத்தியுள்ளோம். அதாவது, y, $\bar{y}$ என்பவை x, $\bar{x}$ களுக்காக முறையே பயன்படுத்தப்பட்டன. இது போன்று x, $\bar{x}$ என் பவை $y, \bar{y}$ என்று மாற்றப்படும். Σ என்ற அடையாளக்குறி 'N' என்ற எழுத்தால் மாற்றப்பட்டுள்ளது. இந்தக் குறிப்பை நினைவில் வைத்துக் கொண்டால் வாய்பாட்டை இலகுவில் எழுதலாம்.

மிக எளிதான இந்த வாய்பாட்டில் x, y, x^2, y^2 மற்றும் xy என்ற வரிசைகளே உள்ளன. இங்கு $(x - \bar{x})$, $(y - \bar{y})$ $(x-x)^2$ $(y - \bar{y})^2$ மற்றும் $(x-\bar{x})$ $(y - \bar{y})$ என்ற வரிசைகள் கணிக்கப்பட வேண்டியதில்லை. இந்தப் புது வாய் பாட்டின் அடிப்படையில் உடன் தொடர்பு கெழு எண் கணிப் போம்.

x	y	x^2	y^2	xy
5	7	25	49	35
4	6	16	36	24
6	9	36	81	54
3	5	9	25	15
2	3	4	9	6
20	30	90	200	134

$n = 5, \ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 20/5 = 4.$

$\bar{x}^2 = 4 \times 4 = 16$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$\bar{y}^2 = 6 \times 6 = 36.$

(1) $\Sigma x = 20.$ (2) $\Sigma = 30.$ (3) $\Sigma x^2 = 90.$ (4) $\Sigma y^2 = 200.$

(5) $\Sigma xy = 134.$ (6) $n = N = 5.$

$$r = \frac{\Sigma xy - N \bar{x} \bar{y}}{(\Sigma x^2 - N \bar{x}^2)(\Sigma y^2 - N\bar{y}^2)}$$

$$= \frac{134 - 5 \times 4 \times 6}{\sqrt{(90 - 5 \times 16)(200 - 5 \times 36)}}$$

$$= \frac{134 - 120}{\sqrt{(90-80)(200-180)}} = \frac{14}{\sqrt{10 \times 20}}$$

$$= \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{14}{14} = 1.$$

கீழே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் 'r' கணிக்கவும்

வயலின் வரிசை எண்	பயன்படுத்திய உரத்தின் அளவு கி.கி. (x)	மகசூலின் அளவு கி.கி. (y)
1	0	3
2	5	17
3	7	22
4	9	26
5	8	25
6	6	19
7	10	32
8	4	11
9	3	9
10	2	7

நமக்கு Σx^2 Σy^2 மற்றும் Σxy தேவைப்படுவதால் x^2, y^2 மற்றும் xy என்ற அளவுகளைக் கணிக்க வேண்டும்.

x	y	x^2	y^2	xy
0	3	0	9	0
5	17	25	289	85
7	22	49	484	154
9	26	81	676	234
8	25	64	625	200
6	19	36	361	114
10	32	100	1024	320
4	11	16	121	44
3	9	9	81	27
2	7	4	49	14
54	171	384	3719	1192

$N = 10.\quad \Sigma x = 54;\ \bar{x} = \frac{54}{10} = 5{\cdot}4\ \bar{x}^2 = \frac{54}{10} \times \frac{54}{10};\ \Sigma x^2 = 384$

$$\Sigma y = 171 \quad \bar{y} = \frac{171}{10} = 17.1$$

$$\bar{y}^2 = \frac{171}{10} \times \frac{171}{10} \quad \Sigma y^2 = 3719 \quad \Sigma xy = 1192$$

$$r = \frac{\Sigma xy - N\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x^2 - N\bar{x}^2)\ \Sigma(y^2 - N\bar{y}^2)}}$$

இங்கு x, y Σx^2, Σy^2 மற்றும் Σxy என்பவற்றிற்குரிய கணித்த அளவுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$r = \frac{1192 - 10 \times 5.4 \times 17.1}{\sqrt{(384 - 10 \times 5.4 \times 5.4)\ (3719 - 10 \times 17.1 \times 17.1)}}.$$

$$= 0.998$$

உரத்திற்கும் மகசூலுக்கும் மிக உயர்ந்த நேர்த் தொடர்பு உளது என்று தெரிய வருகிறது.

சுருக்கு முறை

x	y
0	3
5	17
7	22
9	26
8	25
6	19
10	32
4	11
3	9
2	7

முன் உள்ள முறையில் ஒவ்வொரு X ன் மதிப்பிற்கும் ஒவ்வொரு Y ன் மதிப்பிற்கும் உரிய வர்க்கம் காண வேண்டும். மேலும் ஒவ்வொரு X ஐயும் Y ஐயும் பெருக்கி பெருக்கற் பலன் காண வேண்டும். X ன் மதிப்பும், Y ன் மதிப்பும் சிறிதாக இருக்குமானால் இத்தகைய கணிப்புகள் இலகுவாக இருக்கும். மாறாக இத்திரிபுகளின் அளவுகள் அதிகமாக இருந்தால் அவைகளின் வர்க்கம் காண்பதும் அவ் அளவுகளின் பெருக்கற் பலன் காண்பதும் சிரமமாக இருக்கும். எனவே, சுருக்கு வழிகள் தேவைப்படுகின்றன. X ன் மதிப்பும், Y ன் மதிப்பும் சிறிய அளவில் குறைக்கப்படுமானால், அவைகளின் பெருக்குப் பலனும் வர்க்கப் பலனும் இலகுவில், கணித அட்டவணை இன்றியோ, கணித இயந்திரங்கள் இன்றியோ கணிக்கப் படலாம்.

இச்சுருக்கு முறையில் நாம் அடிப்படையை மாற்றி மதிப்பின் அளவைக் குறைக்கின்றோம். X என்ற திரிபைப் பொறுத்த அளவில் '6' என்ற அளவை விருப்பளவாகவும், Y என்ற திரிபுக்கு 19 என்ற அளவை விருப்பளவாகவும் கருதலாம்.

X என்ற திரிபை U எனவும், Y என்ற திரிபை V எனவும் புதிய இரு திரிபுகளாகக் கீழ் கண்ட சமன்பாட்டை நிறுவலாம்.

$$U = X - 6; \quad V = Y - 19.$$

X, Y, X^2, Y^2, XY என்பவற்றின் அளவுகளை முறையே, U, V, U^2, V^2 மற்றும் UV என்ற புதிய திரிபுகளின் அளவுகளால் மாற்றி அமைக்கலாம்.

$$r = \frac{\Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x^2 - N\bar{x}^2)\ (\Sigma y^2 - N\bar{y}^2)}}$$

$$= \frac{\Sigma uv - N\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{(\Sigma u^2 - N\bar{u}^2)\ (\Sigma y^2 - N\bar{v}^2)}}$$

u	v	u^2	v^2	uv
−6	−16	36	256	96
−1	− 2	1	4	2
1	3	1	9	3
3	7	9	49	21
2	6	4	36	12
0	0	—	—	—
4	13	16	169	52
−2	− 8	4	64	16
−3	−10	9	100	30
−4	−12	16	144	48
−6	−19	96	831	280

$$\bar{u} = \frac{-6}{10} = -0{\cdot}6 \; ; \; \bar{v} = \frac{-19}{10} = -1{\cdot}9$$

$$r = \frac{\Sigma uv - N \bar{u} \bar{v}}{\sqrt{(\Sigma u^2 - N \bar{u}^2) \; (\Sigma v^2 - N \bar{v}^2)}}$$

$$= \frac{280 - 10 \times -0.6 \times -1.9}{\sqrt{(96 - 10 \times (-0.6)^2 \; (831 - 10 \; (-1.9)^2}}$$

$$= \frac{280 - 11.4 = 268.6}{\sqrt{(96 - 3.6) \; (8313 - 6.1)} \qquad \sqrt{92.4 \times 794.9}}$$

$$= \frac{268.6}{\sqrt{(92.4 \times 794.9}}$$

$$= \frac{268.6}{9.6 \times 28.2} = \frac{268.6}{270.7} = 0.992$$

இதிலிருந்து X என்ற அளவை U என்ற அளவாகவும், Y என்ற அளவை V என்ற அளவாக மாற்றியும் 'r' கணிப்பதால் r மதிப்பில் எத்தகைய வேறுபாடும் இல்லை எனத் தெரிய வருகிறது.

இச்சுருக்கு முறை X ஐப் பொறுத்த அளவில் X ன் அடிப்படையில் '0' விலிருந்து '6' என்ற அளவிற்கு மாற்றியும் Y யின் மதிப்பை '0' என்ற அளவிலிருந்து 19 என்ற அளவிற்கு மாற்றியும் அமைக்கிறோம். இத்தகைய மாற்றங்கள் கீழ் வரும் சமன்பாட்டைப் பொறுத்தாகும்.

$$d = x - A$$

நாம் வேறு வகையான மாற்றங்களையும் கையாளலாம். அடிப்படையை மாற்றுவதற்குப் பதிலாக அளவுகோலையே மாற்றலாம். மேலும், அடிப்படையையும், அளவுகோலையும் ஒரே நேரத்தில் மாற்றலாம். இவ்விடங்களில் எல்லாம் உடன் உறவு கெழு எண்ணின் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

(1) அடிப்படை மாற்றம் $d = x - A$

(2) அளவுகோல் மாற்றம் $d = x/c$

(3) அடிப்படையும் அளவுகோலும் மாற்றம் $d = \dfrac{x - A}{C}$

இங்கு X மற்றும் Y என்ற இரு திரிபுகள் இருப்பதால் இரண்டிற்கும் பொதுவாக 'd' என்ற ஒரே அளவைப் பயன் படுத்தினால் குழப்பம் நேரிடும். எனவே, Xக்குப் பதி லாக U என்றும், Y க்குப் பதிலாக 'V' என்றும் புதிய திரிபுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

	x	y
1. அடிப்படை மாற்றம்	$u = x - A$	$v = y - B$
2. அளவுகோல் மாற்றம்	$u = \frac{x}{c}$	$v = \frac{y}{d}$
3. அடிப்படை மற்றும் அளவுகோல் மாற்றம்	$u = \frac{x - A}{c}$	$v = \frac{y - B}{d}$

மாணவர்கள் இரண்டு மற்றும் மூன்றாம் முறைகளையும் ஏதாவது ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் சோதித்துப் பார்க்கலாம்.

கார்ல் பியர்ஸ்ன் உடன் தொடர்பு கெழு எண்ணின் விளக்கம்

பியர்ஸின் கெழு எண் 'r' -1 மற்றும் $+ 1$ என்ற அளவுகளிடையே இருக்கும். துணை எண் 'r' ன் அளவு (1) ஆக இருந்தால் அது சம நேர் உடன் தொடர்பைக் குறிக்கும். மாறாக துணை எண் 'r' ன் அளவு (-1) ஆக இருந்தால் அது சம எதிர் உடன் தொடர்பைக் குறிக்கும். துணை எண் ணின் மதிப்பு '0' ஆக இருந்தால் உடன் தொடர்பு இல்லை எனக் கூறும்.

நிறைகள்

இரு திரிபுகளின் உடன் தொடர்பை விளக்குவதோடு, உடன் தொடர்பின் ஆழத்தை எண்ணிக்கை அளவில் கொடுக்கும்.

குறைகள்

(1) இரு திரிபுகளின் உடன் தொடர்புகள் நேர் கோட்டு முறையிலோ அல்லது வேறு விதத்திலோ இருந்த போதும் பியர்ஸ்ன் கெழு எண் கண்டு பிடிக்கும் இடங்களில் எல்லாம் அத்திரிபுகளின் உடன் தொடர்பு

நேர்கோட்டு முறையில் அமைந்திருக்கும் என்ற அடிப் படையிலேயே அமைந்ததாகும்.

(2) கணிப்பில் காலம் அதிகமாகும்.

உடன் தொடர்பு துணை எண் பற்றி எச்சரிக்கை

உடன் தொடர்பு கெழு எண் திரிபுகள் தம்மில் உள்ள தொடர்பைக் குறிக்கின்றனவே யல்லாது தொடர்புக்கான காரணத்தைக் குறிப்பதில்லை. இவ்விரு திரிபுகள் தொடர் புடையன என்ற காரணத்தால், ஒரு திரிபின் மதிப்பின் மாற்றம், அடுத்த திரிபின் மதிப்பின் மாற்றத்திற்குக் காரணம் என்று கூற முடியாது. மேலும் அவைகளின் தொடர்பு ஒன்றுக்கொன்று பரஸ்பரம் கொடுக்கல் வாங்கல் முறையில் உள்ளது என்றும் கூற முடியாது. அல்லது அவைகளின் தொடர்பு பொது கார ணங்களால் உண்டானது என்றும் கூற முடியாது. மேலும் தொடர்பின் அதிக அளவு, அவை தம்மில் உள்ள தொடர்பையே குறிப்பதாக அமையும் என்றும் சொல்ல முடியாது. ஏனெனில், அத்தகைய உயர்ந்த நிலைத் தொடர்பு எதிர்பாராத சம்பந்த மில்லாத இரு திரிபுகளிடையே காணப்படலாம். எடுத்துக் காட்டாக மருத்துவமனையில் குழந்தைகள் பிறப்பதற்கும், கோதுமை மகசூல் அதிகரிப்பதற்கும் அதிகத் தொடர்பு தெரிய லாம். இத்தகைய தொடர்புகள் போலியானது. எனவே 'பொருளற்ற தொடர்பு' எனக் கூறலாம்.

உடன் தொடர்பு அட்டவணை (Corrrelation Table)

ஒரு திரிபிற்கு நாம் அலைவெண் அட்டவணை தயார் செய்வதைக் கண்டோம். இது போன்று ஒரே நேரத்தில் இரு திரிபுகளுக்கான அட்டவணையையும் தயார் செய்ய முடியும். இத்தகைய அட்டவணை உடன் தொடர்பு அட்டவணை எனப் படும். பரப்பளவு மற்றும் மக்கள் தொகை என்ற இரு திரிபுகள் அடிப்படையில் தமிழ் நாட்டிலுள்ள வட்டாரங் களின் உடன் தொடர்பு அட்டவணை கீழை கொடுக்கப்பட் டுள்ளது.

பரப்பு மற்றும் மக்கள் தொகை அடிப்படையில் சமுதாய வட்டாரங்களின் அட்டவணை

மக்கள் தொகை பரப்பு (கி.மீயில்)	40க்கு குறைவானது	40-60	60-80	80-100	100க்கு அதிகமானது	மொத்தம்
150க்கு குறைவானவை	–	12	4	7	4	27
150 – 250	4	35	51	24	5	119
250 – 350	1	28	68	30	5	132
350 – 450	1	7	24	20	5	57
450 – 550	–	3	7	7	3	20
550 – 650	–	–	5	7	2	14
650 – 850	–	–	1	2	–	3
850க்கு அதிகமானவை	–	–	–	–	2	2
	6	85	160	97	26	374

இரு வழி அட்டவணையில் (Two-way table) இரு திரிபுகளின் அட்டவணையைக் குறிக்கலாம். இவ்விரு திரிபுகளில் ஒன்றோ அல்லது இரண்டுமோ பண்பளவாக இருந்தால் இத்தகைய அட்டவணை, இணைப்பு அட்டவணை (Contingency Table) எனப்படும். ஆனால் இரண்டு திரிபுகளுமே அளவை நிலையிலேயே இருந்தால், அத்தகைய அட்டவணைகள் யாவும் உடன் தொடர்பு அட்டவணைகள் எனப்படும்.

உடன் தொடர்பு அட்டவணை அமைப்பு

கொடுத்துள்ள தரப்படுத்தாத விவரங்களின் ஒரு உடன் தொடர்பு அட்டவணை அமைக்கவும்.

உயரம் செ.மீ.	எடை கி.கி.
156	60
128	62
145	75
120	45
110	40
112	49
115	52
120	38
140	75
125	59
111	65
105	42
112	50
115	60
120	63
125	68
117	74
115	75
112	65
119	69
120	70
125	55
130	58
145	60
150	75

X மற்றும் *Y* என்ற இரு அளவிற்குரிய மிக உயர்ந்த மற்றும் மிகக் குறைந்த அளவைகளைக் காண்போம்.

	X	*Y*
உயர்ந்த அளவு	156	75
குறைந்த அளவு	105	38
வேறுபாடு	51	37

X என்ற திரிபைப் பொறுத்த அளவில் இடைவெளியாக 10 ஐயும், *Y* என்ற திரிபைப் பொறுத்த அளவில் 5ஐ இடைவெளியாக நாம் எடுத்துக் கொள்வோம். அட்டவணையின் பல் வேறு பிரிவுகள் கீழ் கண்டவாறு அமையும்.

X/*Y*	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	மொத்தம்
100-110		1								1
110-120		1	1	2		1	3	1	1	10
120-130	1		1		2	2	1	1		8
130-140					1					1
140-150						1			2	3
150-160						1			1	2
மொத்தம்	1	2	2	2	3	5	4	2	4	25

மொத்தம் 25 உறுப்புகள் இருப்பதால், நிரைகள், மற்றும் வரிசைகள் இவற்றின் கூட்டுத்தொகை 25க்கு சமமாகும்.

இத்தகையதோர் உடன் தொடர்பு அட்டவணையை அமைத்த பின்பு விவரங்களைப் பகுக்கலாம். இப்போது X மற்றும் Y என்ற இரு அளவுகளையும் ஒரே நேரத்தில் எழுத வேண்டும். இங்கு முதல் X ன் மதிப்பு 156 என்ற பிரிவில் இடம் பெறும். ஆனால், Y திரிபிற்கோ ஒன்பது வரிசைகள் உள்ளன. இந்த ஒன்பது வரிசைகளில் எவ்வரிசையில் இதை அடைக்க வேண்டும் என்பதற்காக நாம் Y மதிப்பையும் காண வேண்டும். முதல் உறுப்பின் 'Y' மதிப்பு 60. இது 60–65 என்ற பிரிவில் அமையும். எனவே X பிரிவில் 150 – 160 என்ற வகுப்பிற்கெதிராக 'Y' மதிப்பில் 60 – 65 வரிசைக்கு எதிராக உள்ள சதுரத்தில் ஒரு ஒப்புக் குறியைப் போட வேண்டும். இவ்வாறு எல்லா விவரங்களையும் பகுத்து அட்டவணை அமைக்க வேண்டும்.

எல்லா விவரங்களையும், ஒப்புக் குறிகள் மூலம் மாற்றி அமைத்த பின்பு ஒவ்வொரு சதுர கட்டத்திலும் உள்ள ஒப்புக் குறிகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிட வேண்டும். ஒவ்வொரு கட்டத்திலுமுள்ள ஒப்புக்குறிகளின் எண்ணிக்கை அலைவெண் அளவாகும். ஒவ்வொரு கட்டத்திலுமுள்ள ஒப்புக்குறி அதற்குரிய அலைவெண்ணைக் குறிப்பதால் அவ்வலைவெண் அளவு அக்கட்டங்களில் கீழே கொடுத்துள்ளவாறு குறிக்கப்படும். கடைசியில் மேலே கொடுத்துள்ளது போன்ற ஒரு உடன் தொடர்பு அட்டவணை உருவாகும். இங்கு மொத்தம் 25 உறுப்புகள் இருப்பதால் எல்லா நேர் வரிசைகளின் கூட்டுத் தொகையும் 25 ஆக இருக்கும். இது போன்று எல்லா நிரை வரிசைகளின் கூட்டுத் தொகையும் 25 ஆகும்.

பயிற்சி

(1) கீழ்கண்ட விவரங்கட்கு உடன் தொடர்பு துணை எண் கணிக்கவும்.

x	y
78	125
89	137
97	156
69	112
59	107
79	136

(2) உடன் தொடர்பு துணை எண் காண்க.

x	y
50	80
70	90
30	50
10	40
90	90
120	130
80	70
30	90

(3) கீழ் கண்ட விவரங்கட்கு உடன் தொடர்பு துணை எண் கணக்கிடுக.

	x	y		x	y
(i)	55	35	(ii)	28	23
	65	45		41	35
	75	55		40	33
	35	25		38	34
	45	45		35	31

(4) கீழேயுள்ள பரவலின் தொடர்பளவை (r) காண்க.

	x	y		x	y
(i)	5	8	(ii)	10	12
	6	9		8	10
	4	6		9	15
	7	10		20	25
	8	12		13	8

அத்தியாயம் IV

திரிபுகளின் போக்கு
(Regression)

திரிபுகளின் போக்கு, திரிபுகளின் உடன் தொடர்போடு, ஒன்றியதே. இது ஒன்றைத் தக்க வைத்துக் கொள்ளும் தன்மை எனப் பொருள்படும். ஆனால், புள்ளியியலில் இதன் பொருள், இரு திரிபுகளிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் குறிப்பதாகும். உடன் தொடர்பு இரு திரிபுகளின் தொடர்பின் ஆழத்தைக் குறிப்பதாகும். இரு திரிபுகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருவகை அளவைக்கும் இதற்கும் எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை. உடன் தொடர்பு கெழு வெண்ணின் வர்க்கம் சார்பளவின் மாற்றத்தின் தொடர்பைக் குறிக்கும். ஆனால், திரிபுகளின் போக்கு, இரு திரிபுகளின் கோர்வை நியதி முறையைக் குறிக்கும்.

போக்கின் பகுப்பாய்வும் பலனும்

பொதுவாக சார்புதிரிபின் அளவைச் சுயதிரிபிலிருந்து உறவு முறை நியதியின் மூலம் கணிக்கலாம் என்பது தெரிந்ததே. இவ்வாறு ஒரு நியதியின் மூலம் ஒரு சுய அளவைச் சார்ந்த சார்பளவைக் கணித்த பின்பு ஏற்கனவே கொடுத்துள்ள சார்பளவிற்கும், நியதியின் மூலம் கிடைத்த சார்பளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு ஒரே சார்பளவிற்குரிய இரு வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டைத் தோராய மதிப்புப் பிழை (Error of Estimate) என்றும் கூறலாம். இது ஒரு விதத்தில் திட்டவிலக்கம் போன்றதே. எனவே, மதிப்பீட்டுக் குறையை திட்ட மதிப்பீட்டு குறை (Standard Error of Estimate) எனக் கூறலாம். இங்கு மூன்று வினாக்கள் எழுகின்றன.

(1) **இரு திரிபுகளிடையே உள்ள உடன் தொடர்பின் ஆழத்தைக் கணிப்பது '*r*'**

(2) **இரு திரிபுகளுக்குள்ள உறவு முறை விதியை அல்லது நியதியைக் கணிப்பது**

(3) உறவு முறை விதி மூலம் கணித்த மதிப்பிற்கும் ஏற்கனவே கொடுத்துள்ள மதிப்பிற்குமுள்ள வேறுபாட்டை மூலக்குறை மதிப்பீட்டின் விகிதமாகக் கூறுவது. (Standard Error of Estimate Sy. x)

திரிபுகளின் போக்கை வரை பட மூலமாகவும், இயற் கணிதம் மூலமாகவும் விளக்கலாம். வரைபடம் மூலமாக விளக்குவது திரிபு போக்குக் கோடு எனவும் அல்லது உடன் தொடர்பு போக்குக் கோடு என்றும் இயற் கணித விளக்கம் உடன் தொடர்பு சமன்பாடு என்றும் கூறப்படும்.

உடன் தொடர்பு கோடு (Regression Line)

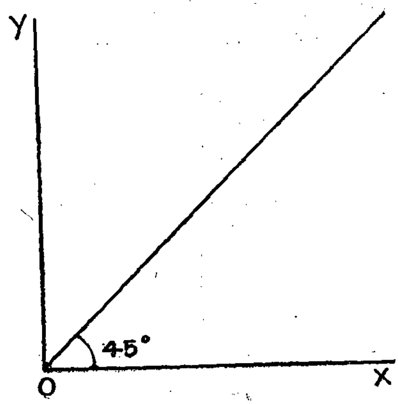
இரு திரிபுகளின் சராசரி தொடர்பு, உடன் தொடர்பு கோட்டால் விளக்கப்படும். ஒரு திரிபின் சரியான அளவு கொடுக்கப்பட்டால் அதற்கிணையான அடுத்த திரிபிற்குரிய எதிர்பார்க்கப்படும் அளவு கணிக்கப்படலாம்.

தொடர்புடைய இரண்டு திரிபுகள் இருக்குமானால், ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒன்றையொன்று அடுத்த ஒரு கோடு என்ற முறையில் வெவ்வேறு இரு உடன் தொடர்பு கோடுகள் உண்டு. 'x' மற்றும் 'y' என்ற இரு திரிபுகள் இருந்தால், x ன் அடிப்படையில் y ற்கு ஒரு உடன் தொடர்பு கோடு உண்டு. இக்கோடு x ன் மீதான y ன் கோடு எனப்படும். இது போல், yன் அடிப்படையில் x க்கு ஒரு கோடு உண்டு. இக்கோடு yன் மீதான x ன் கோடு என்று கொள்ளப்படும்.

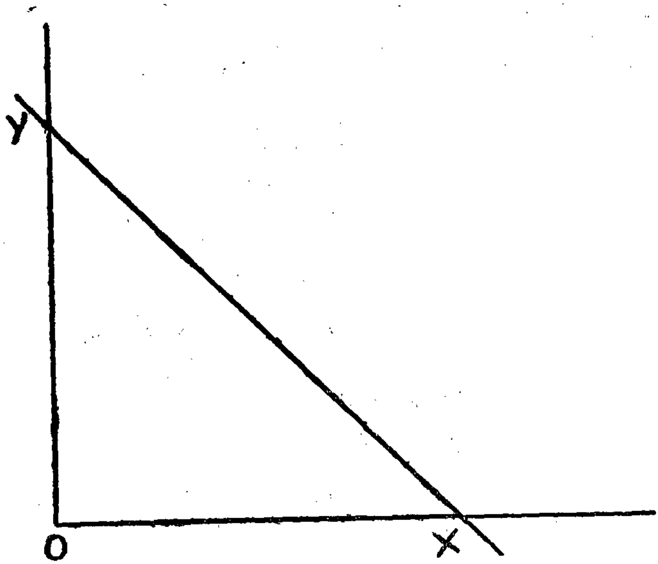
உடன் தொடர்பு கோடுகளின் குணங்கள்

இரு திரிபுகளின் உடன் தொடர்பு சம நேராக இருந்தால், அதாவது உடன் தொடர்பு கெழு எண் $(r) + 1$ என்று இருந்தால் இரு உடன் தொடர்பு கோடுகளும் ஒன்றின் மீது ஒன்றாக செல்லும். எனவே, இரண்டு கோடுகளுக்குப் பதிலாக ஒரே ஒரு கோடு இருக்கும். இச் சூழ்நிலையில் உடன் தொடர்பு கோடு கீழ் கண்டவாறு இருக்கும்.

மாறாக இரு திரிபுகளின் உடன் தொடர்பு சம எதிராக இருந்தால் அதாவது உடனுறவு துணை எண் ஆகிய 'r' $- 1$ ஆக இருந்தால் இரு உடன் உறவு தொடர்பு கோடுகளும் ஒரே கோடாக கீழ் கண்டவாறு இருக்கும்.



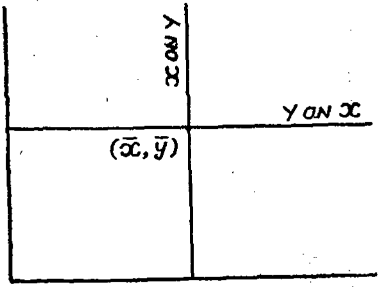
படம் 31
சமநேர் மாறிகளின் தொடர்பு



படம் 32
சம எதிர் மாறிகளின் தொடர்பு

திரிபுகளிடையே எந்தவித உடன் தொடர்பும் இல்லாதிருந்தால் அதாவது உடன் தொடர்பு கெழு அளவான (r) '0'

என்றிருந்தால் இவ்விரு உடன் தொடர்பு கோடுகளும் ஒன்றை யொன்று செங்குத்தாக வெட்டும். அவை இரண்டும் $(\bar{x}, \bar{y})$



படம் 33
சூன்யத் தொடர்பு

என்ற புள்ளியில் வெட்டும். அவ்விரு கோடுகளும் கீழ்கண்ட வாறு அமையும்.

உடன் தொடர்பு சமன்பாடு (Regression Equation)

உடன் தொடர்பு கோடுகள் இயற் கணித கோவையில் விளக்கப்படும் போது, உடன் தொடர்பு சமன்பாடு ஆகும். உடன் தொடர்பு சமன்பாடு உடன் தொடர்பு கோட்டை வரை வதற்குப் பயன்படும். மேலும், கொடுத்த ஒரு திரிபளவிலிருந்து அடுத்த திரிபளவின் சிறந்த மதிப்பைக் கணிப்பதற்கு எண்ணிக் கை அளவில் உள்ள நியதி முறையாகும்.

x, y என்ற இரு திரிபுகள் இருக்குமாயின் கீழ் கண்டவாறு, இரு உடன்போக்குச் சமன்பாடுகள் உண்டு.

1. y யின் மீதான x ன் சமன்பாடு
2. x ன் மீதான y யின் சமன்பாடு

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் கீழ் கண்டவாறு இருக்கும்.

1. yன் மீதான xன் சமன்பாடு

$$(x - \bar{x}) = r. \frac{\sigma x}{\sigma y} (y - \bar{y})$$

2. x ன் மீதான y யின் சமன்பாடு

$$(y - \bar{y}) = r. \frac{\sigma y}{\sigma x} (x - \bar{x})$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலும் உள்ள குறியீடுகளைக்கீழ் கண்டவாறு விளக்கலாம்.

x ன் சராசரி $= \bar{x}$

yன் சராசரி $= \bar{y}$

x ன் மூல விலக்கம் σ_x

y ன் மூல விலக்கம் σ_y

r உடன் தொடர்பு கெழு எண்

'y' என்ற திரிபின் அளவு கொடுக்கப்பட்டால் முதல் விதியைப் பயன் படுத்தி, yக்கு ஏற்ற xன் மதிப்பைக் கணிக்கலாம். xன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால், இரண்டாவது விதியைப் பயன்படுத்தி x க்கு ஏற்ற y ன் மதிப்பைக் கணிக்கலாம். கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கட்கு உடனுறவு சமன்பாடு கணிக்கவும்.

x :	0	5	7	9	8	6	10	4	3	2
y :	3	17	22	26	25	19	32	11	9	7

உடன் தொடர்பு துணை எண்ணான 'r' ன் மதிப்புக் கணிக்க வேண்டி யிருப்பதால், ஒவ்வொன்றிற்கும் x^2, y^2, xy என்ற மதிப்புக் கணிக்கப்பட வேண்டும். இதை உடன் தொடர்பு துணை அல்லது கெழு எண் கணிப்பதில் கையாண்டது போல் செய்ய வேண்டும். கடைசியில் அட்டவணை கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

x	y	x^2	y^2	xy
0	3	0	9	0
5	17	25	289	85
7	22	49	484	154
9	26	81	676	234
8	25	64	625	200
6	19	36	361	114
10	32	100	1024	320
4	11	16	121	44
3	9	9	81	27
2	7	4	49	14
54	171	384	3719	1192

$$\Sigma x = 54. \quad \bar{x} = \frac{54}{10} = 5.4$$

$$\sigma x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - N\bar{x}^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{384}{10} - 5.4 \times 5.4}$$

$$= \sqrt{\frac{384 - 10 \times 5.4 \times 5.4}{10}} = \sqrt{\frac{384 - 291.6}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{92.4}{10}} = \sqrt{9.24} = 3.04$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N} - \bar{y}^2}$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{3719}{10} - 17.1 \times 17.1}$$

$$= \sqrt{\frac{3719 - 10 \times 17.1 \times 17.1}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{3719 - 2924.1}{10}} = \sqrt{\frac{794.9}{10}}$$

$$= \sqrt{79.49} = 8.9$$

$$r = \frac{\Sigma xy - N\bar{x}\bar{y}}{N\sigma x \;.\; \sigma y}$$

$$= \frac{1192 - 10 \times 5.4 \times 17.1}{10 \times 3.04 \times 8.91} = 0.998.$$

நாம் கீழ்கண்ட மதிப்புகளைக் கணித்துள்ளோம்.

$\bar{x} = 5.4; \quad \sigma x = 3.04; \quad \bar{y} = 17.1 \quad \sigma y = 8.91$

$r = 0.998$

yயின் மீதான x ன் உடன் தொடர்பு சமன்பாடு

$$(x - \bar{x}) = r.\frac{\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y})$$

$$(x - 5.4) = 0.998 \times \frac{3.04}{8.94}(y - 17.1)$$

$$x - 5.4 = 0.34\ (y - 17.1)$$

$$x - 5.4 = 0.34\ y - 0.34 \times 17.1$$

$$x - 5.4 = 0.34\ y - 5.81$$

$$x = 0.34y - 5.81 + 5.40$$

$$= 0.34y - 0.41$$

$$= 0.34y - 0.41$$

x ன் மீதான yயின் உடன் தொடர்பு சமன்பாடு

$$(y - \bar{y}) = r.\frac{\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x})$$

$$(y - 17.1) = 0.998 \times \frac{8.94}{3.04} \times (x - 5.4)$$

$$(y - 17.1) = 2.93\ (x - 5.4)$$

$$y - 17.1 = 2.93x - 15.8$$

$$y = 2.93x - 15.8 + 17.1$$

$$y = 2.93x + 1.3$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$, σx, σy, r என்ற விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் xன் மீதான yயின் உடன் தொடர்பு சமன்பாடும் yயின் மீதான x ன் உடன் தொடர்பு சமன்பாடும் கணிக்கலாம் என்பது விளங்கும்

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களின் அடிப்படையில் சமன் பாட்டை அமைப்போம்.

$\bar{x} = 5$; $\bar{y} = 7$; $\sigma x = 1$; $\sigma y = 2$; $r = 0.7$

1. yயின் மீதான x ன் சமன்பாடு

$$(x - \bar{x}) = r.\frac{\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y})$$

$$(x - 5) = 0.7 \times \tfrac{1}{2} (y - 7)$$

$$(x - 5) = 0.35 \quad (y - 7)$$

$$x - 5 = 0.35y - 2.45$$

$$\therefore \quad x = 0.35y - 2.45 + 5$$

$$x = 0.35y + 2.55$$

2. xன் மீதான yயின் சமன்பாடு

$$(y - \bar{y}) = r. \frac{\sigma y}{\sigma x} \ (x - \bar{x})$$

$$(y - 7) = 0.7 \times \tfrac{2}{1} (x - 5)$$

$$= 1.4 (x - 5)$$

$$= 1.4x - 7$$

$$y - 7 = 1.4x - 7$$

$$y = 1.4x.$$

தொடர்பு போக்கின் கெழு அல்லது துணை எண்
(Regression co-efficient)

இரு தொடர்புகளின் உடன் தொடர்பைப் பற்றி படிக்கும் பொழுது உடன் தொடர்பின் ஆழத்தைக் குறிக்கும் உடன் தொடர்பு கெழு அல்லது துணை எண்ணைப் பற்றிப் பார்த்தோம்.

இப்போது உடன் தொடர்பு போக்கைப்பற்றிப் பார்க்கும் போது இன்னொரு அளவான உடன் தொடர்பு போக்கின் துணை எண்ணைப் பற்றி பார்க்கலாம்.

உடன் தொடர்பு கெழு எண் இரு திரிபுகளின் உறவின் ஆழத்தைக் குறிக்கும். ஆனால் தொடர்பு போக்கின் கெழு எண் இரு தொடர்புகளின் உறவு நியதிகளைக் குறிக்கும். தொடர்பின் நியதி அளவு தொடர்பின் ஆழ அளவை விட முக்கியமானது. ஏனெனில் தொடர்பின் நியதி அளவின் மூலமாகத்தான் ஒரு திரிபின் அளவிலிருந்து மற்ற திரிபின் அளவை மதிப்பிட முடியும். எனவே, பொருளாதார ஆய்வு ஒன்றை மதிப்பிடுவதற்கோ,

ஒன்றின் மதிப்பை முன் கூட்டி அனுமானிப்பதற்கோ, தொடர்பு போக்கின் கெழு எண் மிகவும் பயன்படுகிறது. எனவே மாணவர்கள், தொடர்பின் ஆழத்திற்கும் தொடர்பின் நியதிக்கும் உள்ள நுட்பமான வேறுபாட்டை நன்கு தெரிந்து கொள்ள வேண்டும். முழுவதும் நன்கு விளக்க முடியாத போதிலும் மக்கள் உறவு முறையிலிருந்து இதற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு கூறலாம்.

A என்பவர் *B* யுடன் உறவுடையவர் என்று கூறும் போது அவர்கள் இருவரும் உறவினர் என்று அறிகிறோம். ஆனால் அவர்கள் எந்த அளவிற்கு நெருங்கிய உறவினர் என்பது தெரியாது. ஆனால் *A*, *B*யின் சகோதரன் என்று கூறும்போது அவர்கள் உறவு நெருங்கியது என்று உணருகின்றோம். இது உடன் தொடர்பு துணையெண்ணோடு ஒத்ததாகும்.

இதை மேலும் ஆராயலாம். *A*, *B* யின் சகோதரர் என்று கூறுவதற்குபதிலாக *A*, *B* யின் தந்தையின் சகோதரர் மகன் என்றும் கூறலாம். இது உறவு நியதி ஆகும். ஒரு வேளை, இதை போக்கின் துணை எண்ணோடு ஒப்பிடலாம். ஏனெனில் இவ்வுறவு நியதியிலிருந்து *A*யின் மகனுக்கும் *B*யின் மகனுக்குமுள்ள உறவு நியதியைக் கூறலாம்.

நாம் இரு சமன்பாடுகளைக் கவனிப்போம்.

$$(x - \bar{x}) = \frac{r.\ \sigma x}{\sigma y} (y - \bar{y}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(y - \bar{y}) = \frac{r.\ \sigma y}{\sigma x} (x - \bar{x}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

முதல் சமன்பாடோ *y*யின் மீதான *x* ன் சமன்பாடு ஆகும். இரண்டாவது சமன்பாடு *x* ன் மீதான *y* யின் சமன்பாடு ஆகும். இச் சமன்பாட்டிலுள்ள காரணிகளைக் கவனிப்போம்.

$r.\ \dfrac{\sigma x}{\sigma y}$ என்பது முதல் சமன்பாட்டிலுள்ள ஒரு காரணி. இதுவே *y*யின் மீதான *x*ன் போக்கின் துணை எண்ணாகும். இது போன்று இரண்டாவது சமன்பாட்டிலுள்ள $r.\ \dfrac{\sigma x}{\sigma y}$ என்ற காரணி *x*ன் மீதான *y* யின் போக்கின் துணை எண்ணாகும்.

ஒன்றின் மதிப்பை முன் கூட்டி அனுமானிப்பதற்கோ, தொடர்பு போக்கின் கெழு எண் மிகவும் பயன்படுகிறது. எனவே மாண வர்கள், தொடர்பின் ஆழத்திற்கும் தொடர்பின் நியதிக்கும் உள்ள நுட்பமான வேறுபாட்டை நன்கு தெரிந்து கொள்ள வேண்டும். முழுவதும் நன்கு விளக்க முடியாத போதிலும் மக்கள் உறவு முறையிலிருந்து இதற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு கூறலாம்.

A என்பவர் *B* யுடன் உறவுடையவர் என்று கூறும் போது அவர்கள் இருவரும் உறவினர் என்று அறிகிறோம். ஆனால் அவர்கள் எந்த அளவிற்கு நெருங்கிய உறவினர் என்பது தெரி யாது. ஆனால் *A*, *B*யின் சகோதரன் என்று கூறும்போது அவர்கள் உறவு நெருங்கியது என்று உணருகின்றோம். இது உடன் தொடர்பு துணையெண்ணோடு ஒத்ததாகும்.

இதை மேலும் ஆராயலாம். *A*, *B* யின் சகோதரர் என்று கூறுவதற்குபதிலாக *A*, *B* யின் தந்தையின் சகோதரர் மகன் என்றும் கூறலாம். இது உறவு நியதி ஆகும். ஒரு வேளை, இதை போக்கின் துணை எண்ணோடு ஒப்பிடலாம். ஏனெனில் இவ்வுறவு நியதியிலிருந்து *A*யின் மகனுக்கும் *B*யின் மகனுக்குமுள்ள உறவு நியதியைக் கூறலாம்.

நாம் இரு சமன்பாடுகளைக் கவனிப்போம்.

$$(x - \bar{x}) = \frac{r.\ \sigma x}{\sigma y} (y - \bar{y}) \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(y - \bar{y}) = \frac{r.\ \sigma y}{\sigma x} (x - \bar{x}) \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

முதல் சமன்பாடோ *y*யின் மீதான *x* ன் சமன்பாடு ஆகும். இரண்டாவது சமன்பாடு *x* ன் மீதான *y* யின் சமன் பாடு ஆகும். இச் சமன்பாடிலுள்ள காரணிகளைக் கவனிப்போம்.

$r.\ \frac{\sigma x}{\sigma y}$ என்பது முதல் சமன்பாட்டிலுள்ள ஒரு காரணி. இதுவே *y*யின் மீதான *x*ன் போக்கின் துணை எண்ணாகும். இது போன்று இரண்டாவது சமன்பாட்டிலுள்ள $r.\ \frac{\sigma x}{\sigma y}$ என்ற காரணி *x*ன் மீதான *y* யின் போக்கின் துணை எண் ணாகும்.

yன் மீதான xன் போக்கின் துணை எண் $\left(r. \frac{\sigma x}{\sigma y}\right)$
(Regression Co-efficient of x on y)

yயின் மதிப்பில் ஒரு மூல அளவு வேறுபாட்டிற்கு, xன் மதிப்பு $r. \frac{\sigma x}{\sigma y}$ என்ற அளவு வேறுபடும். வேறுவிதமாகக் கூறின், yன் மதிப்பில் ஏற்படும் ஒரு மூல அளவு மாற்றத்திற்கு xன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிப்பதாகும்.

xன் மீதான yயின் போக்கின் துணை எண் $= r. \frac{\sigma y}{\sigma x}$

xன் மதிப்பில் ஒரு மூல அளவு வேறுபாடு ஏற்படும் போது yயின் மதிப்பில் $r. \frac{\sigma y}{\sigma x}$ என்ற அளவு மதிப்பு வேறுபடும். அல்லது $r. \frac{\sigma y}{\sigma x}$ என்பது xல் ஒரு மூல அளவு மாற்றம் ஏற்படும் போது yயில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிப்பதாகும்.

$$r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})\ (y - \bar{y})}{\sigma x\ \sigma y}$$

என்பதை நாம் அறிவோம். எனவே y மீதான xன் போக்குத் துணை எண்

$$= r. \frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})\ (y - \bar{y})}{\sigma x.\ \sigma y} \times \frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$= \frac{\Sigma (x - \bar{x})\ (y - \bar{y})}{\sigma y^2}$$

இது போன்று, xன் மீதான yயின் துணையளவு

$$r. \frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{\Sigma (x - \bar{x})\ (y - \bar{y})}{\sigma x^2}$$

போக்கின் துணை எண்ணிலிருந்து தொடர்பின் துணை எண்ணைக் கணிப்பது

(1) yயின் மீதான xன் போக்கின் துணை எண்ணும் (2) xன் மீதான y ன் போக்கின் கெழு அல்லது துணை எண், என்ற இரு போக்குத் துணை எண்கள் இருந்த போதிலும் 'r' என்ற ஒரே ஒரு தொடர்பு கெழு அல்லது துணையளவே உண்டு.

இந்த இரு தொடர்பு போக்கின் துணை அளவுகளை m_1 மற்றும் m_2 என்று குறிப்பிடுவோம்.

yயின் மீதான xன் போக்குத் துணை எண்

$$m_1 = \frac{r.\ \sigma x}{\sigma y}$$

x ன் மீதான y ன் போக்குத் எண்

$$m_2 = \frac{r.\ \sigma y}{\sigma x}$$

இப்போது இவ்விரு அளவுகளின் பெருக்கற் பலன் காண்போம்.

$$m_1 \times m_2 = \frac{r.\ \sigma x}{\sigma y} \times r.\ \frac{\sigma y}{\sigma x} = r^2$$

$$\therefore \sqrt{m_1 \times m_2} = \pm r.$$

$$\sqrt{m_1\ m_2} = \pm r.$$

தற்போது தொடர்பின் துணை அல்லது கெழு எண் என்பது இரு போக்குத் துணை அல்லது கெழு எண்களின் பெருக்கற் பலனின் வர்க்க மூலம் என்றறிவோம். எனவே, 'r' என்ற அளவிற்கு ஒன்று நேரளவாகவும் (+ve) அடுத்தது எதிரளவாகவும் (−ve) என இரு அளவுகள் உண்டு என்றறிவோம். இரண்டு போக்குத் துணை எண்களும் நேராக இருந்தால் r ன் மதிப்பை நேரளவாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இரண்டு போக்கின் துணை எண்களும் எதிராக இருந்தால் r ன், மதிப்பை எதிரளவையாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கட்கு உடன் தொடர்பு கணிக்கவும்.

yயின் மீதான xன் போக்கு துணை எண் $= 0.9$

xன் மீதான yயின் போக்கின் துணை எண் $= 0.4$

இரு அளவுகளின் பெருக்குப் பலன் $= 0.9 \times 0.4 = 0.36 = r^2$

$\therefore$ தொடர்பு துணை எண் 'r' $= \sqrt{0.36} = 0.6.$

மேலே கொடுத்துள்ள விவரத்திலிருந்து, 'r'ன் அளவு, திரிபுகளின் போக்கின் அளவும் கொடுக்கப்பட்டால் போக்கின் துணை அளவுகளின் சராசரி கணிக்கலாம் என்று தெரிகிறது.

xன் மீதான yயின் போக்குத் துணை எண்ணைக் கீழே கொடுத்துள்ள விவரத்திலிருந்து கணிக்கவும்.

$r = 0.6$

ஒரு மதிப்பின் மீதான மற்றொரு போக்கின் துணை எண் $= 0.9$

முதல் மதிப்பின் மீதான இரண்டாவது மதிப்பின் போக்குத் துணை அளவு $= m$

$$\therefore \quad m \times 0.9 = r^2$$
$$= 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

$$\therefore \quad m = \frac{0.36}{0.9} = 0.4$$

தொடர்பு போக்கின் கெழு எண்ணும் மூலவிலக்க வர்க்கத்தின் விகிதமும்

முன்பு இரு வித தொடர்பு போக்கின் துணை எண்களின் பெருக்குப்பலன் உடன் தொடர்பின் துணை எண்ணின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாயிருக்கும் என்று பார்த்தோம். தற்போது இரண்டு தொடர் போக்கின் துணை எண்களின் விகிதத்தைக் காண்போம்.

$$\frac{y \text{ மீதான } x\text{ன் போக்கின் துணை எண்}}{x \text{ மீதான } y\text{ன் போக்கின் துணை எண்}} = \frac{\left(r.\ \dfrac{\sigma x}{\sigma y}\right)}{r.\ \dfrac{\sigma y}{\sigma x}}$$

$$\text{Ratio} = \frac{r.\ \sigma x}{\sigma y} \times \frac{\sigma x}{r.\sigma y}$$
$$= \frac{\sigma x^2}{\sigma y^2}$$

இரண்டு தொடர்பு போக்கின் துணை எண்களின் விகிதமும் x, y என்ற திரிபுகளின் மூலவிலக்கங்களின் வர்க்க விகிதமும் சமமாயிருப்பதைக் கண்டோம்.

தொடர்பு போக்கின் சமன்பாடும் நேர்கோடும்

முன்பு உடன் தொடர்பின் துணை எண்ணின் உதவியால், தொடர்பு போக்கின் சமன்பாடு அமைப்பது குறித்துக் கண்டோம். சமன்பாடுகள் கீழ் கண்டவாறு இருக்கும்.

$$y \text{ மீதான } x = (x-\bar{x}) = r.\frac{\sigma x}{\sigma y}(y-\bar{y})$$

$$x \text{ மீதான } y = (y-\bar{y}) = r.\frac{\sigma y}{\sigma x}(x-\bar{x})$$

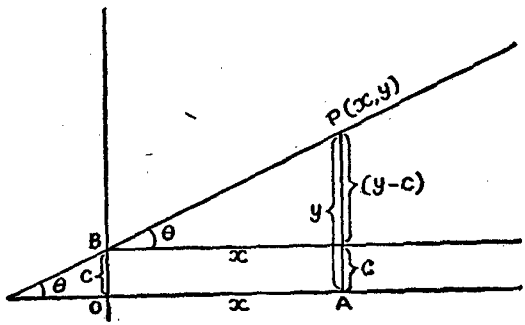
பின்னர் 'r' அளவிலிருந்தும் இரண்டு திரிபுகளின் மூலவிலக்கங்களிலிருந்து இரண்டு தொடர்பு போக்கின் துணை எண்கள் கணிப்பது குறித்தும் கண்டோம்.

y மீதான x ன் போக்குத் துணை எண் $r.\frac{\sigma x}{\sigma y}$

x மீதான y ன் போக்குத் துணை எண் $r.\frac{\sigma y}{\sigma x}$

பொதுவாக இரண்டு போக்குச் சமன்பாடுகளுக்குப் பதிலாக ஒரு போக்குச் சமன்பாடு அமைப்பதும், இரண்டு போக்குத் துணை எண்கள் கணிப்பதற்குப் பதில் ஒரு போக்குத் துணை எண் கணிப்பதும் மரபு. பொது மரபு என்னவெனில் x-ன் மீதான y-ன் போக்குத் துணை எண் கணிப்பதே. ஏனெனில் பொதுவாக x அளவைச் சுய அளவாகவும் y அளவைச் சார்பள வாகவும் கருதப்படுவதால்தான் எனக் கூறலாம்.

போக்குத் தொடர்பின் சமன்பாடு அமைப்பது குறித்து நான் முன்னர் கூறியது சுற்றி வளைத்த வழியாகத் தோன்ற



படம் 34
நேர்க் கோடும் அச்சுகளும்

லாம். வேறு வழியும் உண்டு. அவ்வழியில் முதலில் போக்குத் துணை எண் கண்டு பிடித்து, பின்னர் போக்குச் சமன்பாடு

அமைப்பது உண்டு. இம்முறையில் உள்ள முக்கிய கோட்பாடு என்னவெனில், இரு திரிபுகளின் தொடர்பு நேர்கோட்டு முறையில் உள்ளதென்றும் போக்குச் சமன்பாடு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டிற்கு ஒப்பாகும் என்பதே.

y அச்சைப் பொறுத்தளவில் நேர்கோட்டின் தொடர்பை, நேர்கோடு y அச்சை எந்த இடத்தில் வெட்டுகிறதோ அந்த இடத்திற்கும் அச்சுகளின் ஆரம்பமான '0' என்ற இடத்திற்கும் உள்ள தூர அளவு மூலமாக கூறுவதுண்டு. பெரும்பான்மையும் இது 'c' என்று குறிப்பிடப் படுவதுண்டு. எனவே நேர்க்கோட்டிற்கான சமன்பாட்டில், m மற்றும் c என்ற இரு வித நிலையான மதிப்புகள் உண்டு. இதை ஒரு படத்தின் மூலம் காண்போம்.

$$y = mx + c.$$

என்பது பொதுவாக நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

இங்கு 'm' என்ற கோட்டை x அச்சைச் சந்திக்குமிடத்தின் கோணத்தின் 'tan', அளவு என்றும் 'c' என்பது y அச்சில் கோட்டினால் வெட்டப்படும் துண்டுப் பகுதியின் அளவு என்றும் கூறலாம்.

நியதிச் சமன்பாடு அல்லது சார்பலன் சமன்பாடு (Functional Equation)

இரு திரிபுகள் தம்மிடையேயுள்ள சார்பலன் சமன்பாடு நேர்கோட்டு அடிப்படையில் அல்லது நேர்கோட்டிற்குரிய சமன்பாட்டு வடிவில் இருக்குமென்ற கோட்பாட்டைக் கைக்கொண்டபின், சமன்பாட்டில் உள்ள இரு நிலையான அளவுகளான 'm' மற்றும் 'c' என்ற இரு அளவிற்கும் சரியான விவரத்தை வைத்து சரியானதோர் சமன்பாட்டை $y = mx + c$ என்ற முறையில் அமைக்க வேண்டும். m மற்றும் c என்று இரு அளவுகளின் மதிப்பைக் கணித்த பின்னர், சரியான சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்தலாம். இவ்விரு மதிப்புகளையும் எவ்வாறு அறுதியிடலாம் என்று பார்ப்போம்.

இங்கு புரியாத m, c என்ற இரு அளவுகள் இருப்பதால் இவ் அளவுகள் கொண்ட இரு சமன்பாடுகள் ஒரே நேரத்தில் தேவைப்படுகின்றன. இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் முதலில் தயார் செய்வோம்.

$y = mx + c$ என்பது முதல் சமன்பாடாகும். இச்சமன்பாட்டின் எல்லா உறுப்புகளையும் x என்ற மதிப்பால் பெருக்குவோம். அப்பொழுது $xy = mx^2 + cx$ என்ற இரண்டாவது சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$y = mx + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$xy = mx^2 + cx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

முதல் சமன்பாட்டை முதலில் கவனிப்போம்.

$$y = mx + c.$$

x மற்றும் y அளவுகள் கொண்ட பல விவரங்கள் உள்ளன. நமது எடுத்துக்காட்டில் 5 அளவுகள் x மற்றும் y யிலும் இருப்பதாகக் கருதுவோம்.

x: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

y: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.

$y = mx + c$ என்ற போக்குச் சமன்பாட்டை உறுதி செய்த பின்னர் ஒவ்வொரு x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 மதிப்பிற்கும் பொருத்தமான ஒவ்வொரு y மதிப்பையும் கணிப்போம். தற்போது ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கும் இருவகை y மதிப்புண்டு. ஒரு 'y' மதிப்பு ஏற்கனவே கணிதத்தில் கொடுத்த மதிப்பு, இரண்டாவது மதிப்பு சமன்பாட்டின் மூலம் கணித்த மதிப்பு. இவ்விரு மதிப்புகளையும் முறையே y_o என்றும் y_c என்றும் வேறுபடுத்திக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு y_o என்பது yயின் கண்ட மதிப்பென்றும் y_c என்பது y யின் கணித்த மதிப்பென்றும் பொருள்படும். கடைசியாக நிலைமை கீழ்க்கண்டவாறு மாறும்.

x_i	y_o	கணிக்கப்பட்ட மதிப்பு (y_c)
x_1	y_1	$y_{c_1} = mx_1 + C$
x_2	y_2	$y_{c_2} = mx_2 + C$
x_3	y_3	$y_{c_3} = mx_3 + C$
x_4	y_4	$y_{c_4} = mx_4 + C$
x_5	y_5	$y_{c_5} = mx_5 + C$

2 மற்றும் 3 நிரை வரிசைகளையும் கூட்டுவோம்.

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = mx_1 + mx_2 + mx_3 + mx_4 + mx_5 + C+C+C+C+C$$

$$= m(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 5C$$

$$\Sigma y = m \ \Sigma x + 5C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

பின்னர் கொடுத்த ஒவ்வொரு yயின் மதிப்பையும், கணித்த மதிப்பையும் x யின் மதிப்பான முறையே x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் x_5 மதிப்புகளால் பெருக்குவோம். சமன்பாடுகள் கீழ் கண்டவாறு உருவாகும்.

$$x_1 y_1 = mx_1^2 + Cx_1$$
$$x_2 y_2 = mx_2^2 + Cx_2$$
$$x_3 y_3 = mx_3^2 + Cx_3$$
$$x_4 y_4 = mx_4^2 + Cx_4$$
$$x_5 y_5 = mx_5^2 + Cx_5$$

கூட்டிய பின்னர்

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 = \Sigma xy$$

$$mx_1^2 + mx_2^2 + mx_3^2 + mx_4^2 + mx_5^2$$

$$+ Cx_1 + Cx_2 + Cx_3 + Cx_4 + Cx_5.$$

$$= m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + + C(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$\Sigma xy = m \Sigma x^2 + C \Sigma x \ \ldots\ldots\ldots (2)$$

தற்போது இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்

$$\Sigma y = m \ \Sigma x + 5c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma xy = m \ \Sigma x^2 + C \ \Sigma x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

முதல் சமன்பாட்டில் தோன்றும் 5 என்ற மதிப்பு, உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். பொதுவாக உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை (n) என்று குறிப்பிடப்படும். எனவே சமன்பாடுகளைக் கீழ் கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\Sigma y = m \Sigma x + Nc \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma xy = m \Sigma x^2 + C \Sigma x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

'*m*' மற்றும் '*c*' என்ற இரு அளவுகளின் உண்மையான மதிப்பைக் காண உதவியாக உள்ள இவ்விரு சமன்பாடுகள் இயற் சமன்பாடுகள் (Normal Equations) எனப்படும். கொடுத்துள்ள விவரங்களைக் கூட்டினால் Σx மற்றும் Σy என்ற இரு மதிப்புகளைக் காணலாம். நமக்குத் தேவையானவை Σx^2 மற்றும் Σxy என்ற இரண்டுமே. இதில் Σx^2 என்ற மதிப்பை, ஒவ்வொரு x மதிப்பையும் வர்க்கமாக்கி அவைகளைக் கூட்டி மதிப்பிடலாம். இது போன்று Σxy என்ற மதிப்பையும் ஒவ்வொரு x மதிப்பையும் அதற்கிணையான 'y' மதிப்பையும் பெருக்கி, பின்னர் பெருக்கற் பலன்களைக் கூட்டிக் கணிக்கலாம். இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் நன்கு விளக்கலாம்.

	x	y	x^2	xy
1	0	3	0	0
2	5	17	25	85
3	7	22	49	154
4	9	26	81	234
5	8	25	64	200
6	6	19	36	114
7	10	32	100	320
8	4	11	16	44
9	3	9	9	27
10	2	7	4	14
மொத்தம்	54	171	384	1192
	Σx	Σy	Σx^2	Σxy

இரு இயற் சமன்பாடுகளின் மதிப்புகளை நிரப்பவும்

$$54m + 10C = 171 \text{ —— } (1)$$

$$384m + 54C = 1192 \text{ —— } (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் உடனிகழ் அல்லது ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள் முறை மூலம் நேர் செய்து, m மற்றும் c என்ற இரு அளவுகளின் மதிப்பைக் கணிக்கலாம். இம்முறையில் 'm' மற்றும் 'c' என்ற இரண்டில் ஏதாவது ஒன்றின்துணை எண்ணை இரு சமன்பாடுகளிலும் ஒன்று போல் மற்றவேண்டும். இதில் C யின் துணை எண்ணை இரு சமன்பாடுகளிலும் ஒன்று போலாக் கலாம். இதற்காக முதல் சமன்பாட்டை 54 கொண்டும் இரண் டாவது சமன்பாட்டை 10 கொண்டும் பெருக்க வேண்டும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் கீழ்க்கண்டவாறு மாறும்.

$$54 \times 54m + 54 \times 10C = 171 \times 54 \qquad (1)$$

$$384 \times 10m + 54 \times 10C = 1192 \times 10 \qquad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலும், C யைக் கொண்டுள்ள உறுப் புகள் சமமாகவும் ஒரே அடையாளம் கொண்டதாயும் உள்ளன. ஆகையால் இரண்டாவது சமன்பாட்டை முதல் சமன்பாட்டிலி ருந்து கழித்தால் 'C' அடங்கிய உறுப்பு மறைந்து விடும்.

$$54 \times 54m = 171 \times 54 \qquad (1)$$

$$384 \times 10m = 1192 \times 10 \qquad (2)$$

$$2916m = 9234 \qquad (1)$$

$$3840m = 11920 \qquad (2)$$

$$(2)-(1)/924m = 2686$$

$$m = \frac{2686}{924} = 2.9074.$$

தற்போது 'm' என்ற அளவிற்கான கணித்த மதிப்பை, ஏதாவது ஒரு சமன்பாட்டில் அமைக்கலாம்.

$$54 \quad + 10C = 171$$

$$54 \times 2.9074 + 10C = 171$$

$$156.9996 + 10C = 171$$

$$10C = 171 - 156.996$$
$$= 14.0004$$
$$C = \frac{14}{10} = 1.4$$

தேவையான சமன்பாடு

$$y = 2.9074\, x + 1.4$$

கீழ் கண்டவாறு சுருக்கலாம்.

1. சிறந்த பொருத்தமான நேர்கோடு, தொடர்பு போக்கு கோடு எனப்படும்.
2. போக்குக் கோட்டிற்கான சமன்பாடு போக்குச் சமன் பாடு என்ப்படும்.
3. 'm' எனப்படும் x மதிப்பின் துணை எண், போக்குத் துணை என்ணாகும்.
4. போக்குச் சமன்பாட்டின் உதவியால் கணிக்கப்படும் y யின் மதிப்பு, x மீதான y யின் போக்கு மதிப்பு எனப்படும்.
5. C யின் மதிப்பு, x யின் மதிப்பு '0' என இருக்கும் போது ஏற்படும் y யின் மதிப்பாகும்.

   $$Y = 0 + C.$$
6. m மற்றும் 'C' என்ற இரு அளவுகளையும் கணிப்ப தற்காகப் பயன்படும் இரு சமன்பாடுகளும் இயற் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

உடன் தொடர்பு போக்குச் சமன்பாட்டு மூலம் சார்பளவு கணித்தல்

இரு திரிபுகளிடையேயுள்ள சார்பு நியதிக்கான சமன் பாட்டைக் கணித்த பின்னர் கொடுத்துள்ள ஒவ்வொரு x அளவிற்கேற்ற ஒவ்வொரு y அளவையும் கணிக்கலாம். தற் போதுள்ள நமது எடுத்துக்காட்டில் சார்புச் சமன்பாடு

$$y = 2.9074\, x + 1.4$$

இச்சமன்பாட்டைக் கவனித்து ஒவ்வொரு x அளவிற்கேற்ற y அளவைக் கவனிப்போம். இதற்காக சமன்பாட்டில் ஒவ்வொரு x அளவையும் அமைத்துக் கணிக்க வேண்டும். இவ்வாறு

கணித்துக் கிடைத்த 'y' அளவுகள் கீழ் வருமாறு. கணித்துக் கிடைத்த 'y' அளவுகள் yc என்று குறிப்பிடப்படலாம்.

X	$Y_C = 2.9074\,x + 1.4$	
0	$= 2.9074 \times 0 + 1.4 =$	1.40
5	$= 2.9074 \times 5 + 1.4 =$	15.94
7	$= 2.9074 \times 7 + 1.4 =$	21.75
8	$= 2.9074 \times 8 + 1.4 =$	24.66
9	$= 2.9074 \times 9 + 1.4 =$	27.57
6	$= 2.9074 \times 6 + 1.4 =$	18.85
10	$= 2.9074 \times 10 + 1.4 =$	30.47
4	$= 2.9074 \times 4 + 1.4 =$	13.03
3	$= 2.9074 \times 3 + 1.4 =$	10.12
2	$= 2.9074 \times 2 + 1.4 =$	7.21
		171.00

ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கேற்றவாறு ஒவ்வொரு 'y' அளவிற்கும் 2 மதிப்புகள் உண்டு. ஒன்று கொடுத்த விவரம் என்றும் மற்றொன்று கணித்த விவரம் என்றும் 2 வகைப்படும். நாம் உருவாக்கிய சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தன்மையை, மறைமுகமாக அளவின் இரு மதிப்புகளின் வேறுபாட்டின் உதவியால் அறுதியிடலாம்.

y_o	y_c	$d = y_o - y_c$	$d^2 = (y_o - y_c)^2$
3	1.40	1.60	2.5600
17	15.94	1.06	1.1236
22	21.75	0.25	0.0625
26	27.57	−1.57	2.4649
25	24.66	0.34	0.1156
19	18.85	0.15	0.0225
32	30.47	1.53	2.3409
11	13.03	−2.03	4.1209
9	10.12	−1.12	1.2544
7	7.21	−0.21	0.0441
171	171.00	0.000	14.1094

மொத்த 'Y' யின் வேறுபாடு '0' என்று தெரிகிறது. வேறுபாடுகள் நேராகவும் எதிராகவும் இருப்பதால் மொத்த வேறுபாடு 0 என மாறுகிறது. இச்சிரமத்தைத் தவிர்க்கலாம். ஒவ்வொரு வேறுபாட்டையும் வர்க்கமாக்கி விட்டால் எல்லா வேறுபாட்டு வர்க்கமும் நேராகிவிடும்.

y_o	y_o^2	y_c	y_c^2	$d^2 = (y_o - y_c)^2$
3	9	1.40	1.9600	2.5600
17	289	15.94	254.0836	1.1236
22	484	21.75	473.0625	0.0625
26	676	27.57	760.1049	2.4649
25	625	24.66	608.1156	0.1156
19	361	18.85	355.3225	0.0225
32	1024	30.47	928.4209	2.3409
11	121	13.03	169.7809	4.1209
9	81	10.12	102.4144	1.2544
7	49	7.21	51.9841	0.0441
171	3719	171.00	3705.2494	14.1094

கொடுத்துள்ள y_o அளவுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை (Σy_o^2) கண்டு பிடித்த 'y_c' அளவுகளின் வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் Σy_c^2 மற்றும் கொடுத்த y_o அளவிற்கும் கணித்த அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் வர்க்கங் களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் $\Sigma (y_o - y_c)^2$ க்கும் சமம் என்பதைக் கூறுகிறோம்.

$$\Sigma y_o^2 = \Sigma y_c^2 + \Sigma(y_o - y_c)^2$$

$$\begin{aligned} 3719 &= 3705.2494 + 14.1094 \\ &= 3719.36 \\ &= 3719. \end{aligned}$$

இங்கு காணப்படும் .36 என்பது மிகமிகச் சிறிய தாக இருப்பதால் நிராகரித்து விடலாம். எனவே வேறு பாட்டின் வர்க்கத்தை '0' என்று வைத்துக் கொள்ளலாம். எனவே சமன்பாட்டைக் கீழ் வறுமாறு எழுதலாம்.

$$\Sigma(y_o - y_c)^2 = \Sigma y_o^2 - \Sigma y_c^2$$

மதிப்பீட்டின் மூலக்குறை (Standard Error of Estimation)

$y_o - y_c$ என்பது இரு வித 'y' அளவுகளின் வேறுபாடு அல்லது குறை எனலாம்.

$(y_o - y_c)^2$	வேறுபாட்டின் வர்க்கம்
$\Sigma(y_o - y_c)^2$	வேறுபாட்டின் வர்க்கங்களின் மொத்தம்
$\dfrac{\Sigma(y_o - y_c)^2}{N}$	வேறுபாட்டின் வர்க்கங்களின் சராசரி
$\sqrt{\dfrac{\Sigma(y_o - y_c)^2}{N}}$	வேறுபாட்டின் வர்க்கங்களின் சராசரி யின் வர்க்க மூலம்

இதைக் கீழ் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$V(d) = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \text{ since } \bar{d} = 0.$$

இது உண்மையில் நாம் கணித்த அளவில் காணப்படும் சராசரி குறையே. எனவே இது மதிப்பீட்டின் திட்டகுறை எனப்படும். சுருக்கமாக இதை விலக்கத்தின் சராசரி விலக்கம் எனலாம்.

$$\sigma d = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} = \text{since } \bar{d} = 0$$

போக்காய்வின் முக்கிய குணங்கள்

1. போக்காய்வின் முக்கிய பயன் என்னவெனில் முன்னறிவிப்பும், முன் மதிப்பீடு செய்வதுமாகும். எனவே உடன் தொடர்பை விட தொடர்பு போக்கிற்கே முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படுகிறது. பொருளாதார ஆய்வில் இதற்கு முக்கிய இடம் உண்டு.

2. விலை மாற்றத்திற்குத் தகுந்தவாறு பொருள்களின் தேவையிலும், வரவிலும் ஏற்படும் மாறுதலை மதிப்பீடு செய்ய போக்களவு பயன்படும். மேலும் வருவாய்கேற்றவாறு மக்கள் சேமிப்பில் காணப்படும் மாற்றத்தையும், நுகர்வில் தோன்றும் மாற்றத்தையும் காணப் பயன்படும்.

3. சேமிப்பு, மற்றும் முதலீடுகள் பற்றியுள்ள ஆய்விற்கும் பயன்படும்.

4. பருவமாற்றங்களுக்கேற்றவாறு பயிர் மகசூலின் மதிப்பீட்டிற்கும் பயன்படும்.

5. வரி விகிதங்களில் ஏற்படும் மாறுதலுக்குத் தகுந்தவாறு மக்கள் வருவாயில் எழும் மாற்றங்களையும் வங்கிகளின் சேமிப்பு நிதியில் காணப்படும் மாற்றங்களையும் வட்டி விகிதங்களினால் ஏற்படும் மாற்றங்களையும் அறியவும் இம்முறை பயன்படும்.

உடன் தொடர்பிற்கும் உடன் தொடர்பின் போக்கிற்கும் உள்ள வேறுபாடு

1. இரு திரிபுகளிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பின் ஆழத்தை உடன் தொடர்பு விளக்கும். ஆனால் தொடர்பு போக்கு சுய திரிபில் காணப்படும் மாற்றத்திற்கேற்றவாறு சார்புத்திரிபில் தோன்றும் சராசரி மாற்றத்தின் வீதத்தைக் குறிக்கும். மேலும் போக்கு இரு திரிபுகளின் இடையேயுள்ள நியதியைக் கூறும்.

2. x மற்றும் y என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பே y மற்றும் x என்பவற்றிற்குள்ள தொடர்புக்கு சமமாகும். ஆனால் y மீதான x ன் போக்கும்

x ன் மீதான y யின் போக்கும் ஒன்று போலிராது மாறாக வெவ்வேறாக இருக்கும்.

பயிற்சி

(1) கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு ஒரு நேர் கோட்டைப் பொருத்தவும்.

	x	y		x	y
(i)	5	8	(ii)	10	12
	6	9		8	10
	4	6		9	15
	7	10		20	25
	8	12		13	8

(2) x ன் மீதான y யின் உடன் தொடர்பு கோடும், y யின் மீதான x ன் உடன் தொடர்பு கோடும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(அ) x, y யிற்கிடையேயான உடன் தொடர்பு துணை எண் காண்க.

(ஆ) $\sigma x = \sigma y$ யின் விகிதத்தையும் கணக்கிடவும்.

(i) $y = 0.80\, x + 25$

$x = 0.45\, y + 30$

(ii) $x + 2\, y = 5$

$2x + 3\, y = 8$

(3) கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களிலிருந்து இரண்டு உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

x	y
70	120
80	130
90	150
60	110
50	100
70	130
60	120
60	100

(4) கீழே கொடுத்துள்ள தந்தை, மகன் ஆகியோரின் உயரங்களிலிருந்து, அவர்களின் உயரங்களின் தொடர்பு போக்கு துணை எண் கணிக்கவும். தந்தையின் உயரம் 164 செ.மீ எனில், மகனின் உயரத்தைக் கணக்கிடவும்.

தந்தையின் உயரம் செ.மீ	மகனின் உயரம் செ.மீ.
160	180
165	160
162	170
158	180
168	160

(5) $\bar{x} = 10$ $\bar{y} = 20$

$\sigma x = 1.5$ $\sigma y = 2.$

$r = 0.7$

இவற்றிலிருந்து உடன் தொடர்பு சமன்பாட்டினைக் கணிக்கவும். மேலும், $y = 7$ எனில் x ன் சிறந்த மதிப்பீட்டையும், $n=5$ எனில் y ன் சிறந்த மதிப்பீட்டையும் கணிக்கவும்.

(6) $\bar{x} = 65$; $\bar{y} = 67$; $\sigma x = 2.5$; $\sigma y = 3.5$; $r = 0.8$

(i) இரு உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகளைக் கணிக்கவும்

(ii) $y = 70$ எனில் x ன் சிறந்த மதிப்பீட்டைக் கணக்கிடுக.

அத்தியாயம் V

வரிசைத் தொடர்பு
(Rank Correlation)

இரு திரிபுகளிடையேயுள்ள தொடர்பைக் கீழேயுள்ள இரு முறைகளிலும் ஆராயலாம்.

1. திரிபுகளிடையேயுள்ள உடன் தொடர்பைக் கொடுத்துள்ள மதிப்புகளின் அடிப்படையிலேயே ஆய்வது.
2. மதிப்புகளின் அடிப்படையில் அல்லாமல் மதிப்புகளுக்குரிய வரிசை முறையிலும் ஆய்வு செய்வது.

வரிசை முறை (Ranking) தரப்படுத்துதல்

பொருள்களை ஏதாவது ஓர் ஒழுங்கான முறையில் அமைப்பது வரிசை முறை அல்லது வரன் முறை எனப்படும். ஒரு குழுவில் உள்ள நபர்கள் ஒரு பண்பின் அடிப்படையில் ஒழுங்காக வரிசைப் படுத்தப்பட்டுள்ளனர் என வைத்துக் கொள்வோம். செயல் முறையில் முடியாது எனினும் கொள்கைப் படி ஒழுங்காக வரிசைப்படுத்த முடியும் என்ற நிலையில் உள்ள விவரங்களின் மீது எழுந்துள்ள வரிசை, முறையாக இருக்கலாம். புத்தி கூர்மை, நிறம் முதலானவை இதன் பாலடங்கும்.

மொழி நூல், அறிவியல் என்ற இரு பாடங்களிலும் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களை ஆய்வு செய்வோம். ஒவ்வொரு பாடத்திற்கும் வரிசை முறை கொடுப்போம். பெற்ற மதிப்பெண்கள் அடிப்படையில் வரிசை விவரங்கள் கீழ் வருமாறு:

ஒரு மாணவன் இரு பாடங்களிலும் ஒரே திறமையுடையவனாக இருந்தால், இரு பாடங்களிலும் ஒரே மதிப்பெண் பெறலாம். இதே சிறந்த நிலை எல்லோருக்கும் பொருந்துமானால், ஒவ்வொரு மாணவனும் இரு பாடத்திலும் ஒரே விதமான மதிப்பெண்களைப் பெறுவர். சில வேளைகளில், ஒருவன் இரு பாடங்களிலும் பெற்ற மதிப்பெண் ஒன்று போல் இல்லாதிருக்கலாம்.

எனினும் ஒருவர் இரு பாடங்களிலும் பெற்ற வரன் முறை வரிசை எண் ஒன்றாகயிருக்கலாம். இந்நிலையில் ஒருவர் இரு பாடங்களிலும் அடைந்த வரிசை எண்களின் வேறுபாடு 0 ஆகயிருக்கும். இத்தகைய சிறந்த சூழ்நிலையிலும் ஒவ்வொரு மாணவனைப் பொறுத்த வரையிலும் இத்தகைய வரிசை முறைகளின் வேறுபாடு 0 ஆகத்தானிருக்கும்.

மாணவர்களின் வரிசை எண்	மொழி நூலில் பெற்ற மதிப்பெண்	வரன் முறை எண்	அறிவியலில் பெற்ற மதிப்பெண்	வரன் முறை எண்	இரு வரன் முறைகளுக்குமுள்ளவேறுபாடு	வரன் முறை வேறுபாட்டின் வர்க்கம்
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	68	2	65	4	−2	4
2	70	1	60	5	−4	16
3	65	3	75	1	2	4
4	55	5	50	7	−2	4
5	50	6	70	3	3	9
6	60	4	73	2	2	4
7	48	7	55	6	1	1
8	44	9	48	8	1	1
9	40	10	45	9	+1	1
10	45	8	42	10	−2	4
		55		55	0	48

இத்தகைய இலட்சிய நிலை உருவாவதில்லை. இரு பாடங்களிலும் ஒருவர் அடைந்த வரிசை எண் வேறுபடும். ஒவ்வொரு பாடத்திலும் ஒவ்வொரு மாணவர் பெற்ற வரிசை வேறுபட்ட போதிலும் மொத்த வேறுபாடு '0' ஆகவும் இருக்க லாம்.

இத்தகைய விந்தையான சூழ்நிலையால் வரிசை உடன் தொடர்பைக் கணிக்க ஒரு வாய்பாட்டை உருவாக்கியுள்ளனர். கீழேயுள்ள வாய்பாடு பயன்படுகிறது.

$$r = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n\,(n+1)\,(n-1)}$$

இங்கு 'd' எனப்படுவது வரிசைகளிடையேயுள்ள வேறுபாடு. 'n' என்பது மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டில்

$$r = 1 - \frac{6 \times 48}{10 \times (100-1)} = 1 - \frac{6 \times 48}{10 \times 99}$$

$$= 1 - \frac{288}{990} = \frac{702}{990} = 0.71$$

இதே எடுத்துக்காட்டை வேறுவிதமாகவும் கூறலாம். 10 மாணவர்களுக்கு ஒரே பாடத்தில் இரு வெவ்வேறு ஆசிரியர்கள் கொடுத்துள்ள மதிப்பெண் என்றும் கருதலாம்.

வரிசைத் தொடர் துணை எண்ணின் விளக்கம்

1. வரிசைத் தொடர் துணை எண்ணின் மதிப்பு -1 லிருந்து + 1 வரை செல்லும்.
2. இங்கு வரிசைத் தொடர் துணை 'R' ன் மதிப்பு 1 என்றிருந்தால் இரு திரிபுகளின் வரிசை எண்க ளிடையே ஏகப் பொருத்தம் எனக் கூறலாம்.

முதல் பாடத்தில் வரிசை	இரண்டாம் பாடத்தில் வரிசை	d	d^2
1	1	0	0
2	2	0	0
3	3	0	0
4	4	0	0
5	5	0	0

$$R = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 0}{5 \times (25 - 1)}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1.$$

3. வரிசைத் தொடர் துணை எண்ணின் (*R*) மதிப்பு −1 என்றிருந்தால் வரிசை எண்ணில் ஒருமைப்பாடு இருப்பதைக் குறிப்பிடும். ஆனால் அவைகள் ஒன்றிற் கொன்றுதலைகீழ் முறையில் உள்ளது என்று விளங்கும்.

வரிசை	வரிசை	*d*	d^2
1	5	−4	16
2	4	−2	4
3	3	0	0
4	2	2	4
5	1	4	16
			40

$$R = 1 - \frac{6\ d^2}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 40}{5 \times 24} = 1 - 2 = -1.$$

4. வரிசைத் தொடர் துணை எண்ணின் மதிப்பு '0' என்றிருந்தால் அவைகளின் வரிசை தம்மில் எவ்விதத் தொடர்புமில்லை என்று கூறலாம்.

பயிற்சி

(1) வரிசைத் தொடர்பளவைக் காண்க.

வரிசை		மதிப்பெண்கள்	
A	B	A	B
1	4	25	35
3	7	55	65
4	5	50	40
5	6	35	25
6	3	45	60
7	2	62	76
2	1	28	42
		59	62

அத்தியாயம் VI

குறியீட்டெண்கள்

புள்ளிவிவரங்களின் மதிப்புகளில் ஏற்படும் இயற்கையான மாற்றங்களை அளவிடுவது சிரமமாகவோ அல்லது முடியாமலோயிருக்குமானால் குறியீட்டெண்கள் அத்தகைய மாற்றங்களின் ஒப்பளவைக் குறிப்பதற்குரிய ஒரு முறை எனக் கருதலாம். நாம் ஆய்விற்கென எடுத்துக் கொண்ட திரிபு நிலையில்லாதிருந்தால், குறியீட்டெண் முறை உத்தேச மானதாகும். இத்தகைய குறியீட்டெண் முறை ஒப்பளவேயாகும்.

மையப் போக்களவுகள் ஒரு குழுவில் உள்ள விவரங்களின் சராசரியைக் குறிப்பதாகும். இது பல விதமான அளவைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல விவரங்களின் சராசரியைப் பிரதிபலிப்பதாகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வகைத் தானியத்தின் விலை நிறுத்தலளவிலும், வேறு ஒரு பொருளின் எடை முகத்தலளவிலும், வேறு ஒரு பொருளின் விலை நீட்டலளவிலும் கொடுக்கப்படலாம். இவ்வாறு பலவகை அளவைகளில் உள்ள பொருள்களின் சராசரி விலையைக் குறியீட்டெண்கள் மூலம் கொடுக்க முடியும்.

குறியீட்டெண்களின் பாகுபாடுகள்

பொருளாதார ஆய்வில் பல வகையான குறியீட்டெண்கள் பயன்படுகின்றன. சிலவகைக் குறியீட்டெண்கள் கீழ் வருமாறு.

1. விலை குறியீட்டெண்கள் (Price Index Numbers)
2. அளவு குறியீட்டெண்கள் (Quantity Index Numbers)
3. விலை மதிப்புக் குறியீட்டெண்கள் (Value Index Numbers)
4. தனி நோக்கத்திற்கான குறியீட்டெண்கள் (Index Numbers for Special Purposes)

பொதுவாக, நாம் விலை குறியீட்டெண்ணையும் அளவு குறியீட்டெண்ணையும் அடிக்கடி பார்க்க நேரிடும். எனவே

பொருளாதார ஆய்வில் மிக அதிகமாகக் கையாளப்படும் விலை குறியீட்டெண் பற்றி விரிவாகக் காண்போம்.

விலை குறியீட்டெண் தயாரிப்பு

இரு வெவ்வேறு காலங்களில் நிலவிய அரிசியின் விலை கொடுத்துள்ளதாகக் கருதுவோம். விலை குறியீட்டெண் கணிக்கலாம்.

1971ல் அரிசியின் விலை (கி.கி.) ரூ. 2

1978ல் அரிசியின் விலை (கி.கி.) ரூ. 3

இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் ஓர் ஆண்டில் நிலவிய விலையை அடிப்படையாகக் கருதப்பட்டு, அடுத்த ஆண்டில் நிலவும் விலையை அடிப்படை விலையின் விகிதமாகக் கொடுக்கப் படும். நமது எடுத்துக்காட்டில் 1971ல் நிலவிய விலையை அடிப்படையாண்டு விலையாகவும், 1978ல் நிலவிய விலையை நடப்பாண்டு விலையாகவும் கருதலாம்.

$$\text{1978ல் உள்ள விலையின் குறியீட்டெண்} = \frac{\text{1978ல் உள்ள விலை}}{\text{1971ல் உள்ள விலை}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

நடப்பாண்டு விலை அடிப்படையாண்டு விலையால் வகுக்கப் பெற்று, விலை விகிதமாகக் கொடுக்கப்படும். மேலே உள்ள எடுத்துக் காட்டில் விலை விகிதம் 1.5. அடிப்படை ஆண்டு விலையை விட நடப்பாண்டின் விலை அரை மடங்கு அதிக மாகியது எனப் பொருள்படும். வேறுவிதமாகக் கூறின் விலை 50% அதிகரித்துள்ளது. பொதுவாக இவ்விகித அளவுகள் எளிதில் கணிப்பதற்கும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளவும், எளிதில் நினைவு வைத்துக் கொள்வதற்காகவும், 100 கொண்டு பெருக்கப் பெற்று நூற்றுமான அளவில் கொடுக்கப்படும். எனவே விலை குறியீட்டிற் கான வாய்பாடு

$$\text{விலை குறியீடு} = \frac{\text{நடப்பாண்டு விலை}}{\text{அடிப்படையாண்டு விலை}} \times 100$$

நமது எல்லா ஆய்விலும் அடிப்படையாண்டு குறியீட்டெண் 100 என்று எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு விலை குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	மூல அளவு பொருளின் விலை ரூ.	விலை குறியீட்டெண்
1970	4	$\frac{4}{4} \times 100 = 100$
1971	5	$\frac{5}{4} \times 100 = 125$
1972	6	$\frac{6}{4} \times 100 = 150$
1973	7	$\frac{7}{4} \times 100 = 175$
1974	8	$\frac{8}{4} \times 100 = 200$
1975	10	$\frac{10}{4} \times 100 = 250$

அளவு குறியீட்டெண் (Quantity Index Number)

முன்னர் விலை குறியீட்டெண் குறித்துக் கண்டோம். தற்போது அளவு குறியீட்டெண் குறித்துக் காண்போம். அளவு குறியீட்டு எண் கணிப்பில், அடிப்படை மற்றும் நடப்பாண்டு களில் உள்ள அளவுகளைப் பற்றியே ஆய்வோம்.

$$\text{அளவு குறியீட்டெண்} = \frac{\text{நடப்பாண்டு அளவு}}{\text{அடிப்படையாண்டு அளவு}} \times 100$$

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு 1972ம் ஆண்டை அடிப் படையாண்டாகக் கொண்டு அளவு குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	அளவு (குவிண்டால்)	அளவு குறியீட்டெண்
1972	12	$\frac{12}{12} \times 100 = 100.0$
1973	14	$\frac{14}{12} \times 100 = 116.7$
1974	15	$\frac{15}{12} \times 100 = 125.0$
1975	18	$\frac{18}{12} \times 100 = 150.0$
1976	20	$\frac{20}{12} \times 100 = 166.7$
1977	25	$\frac{25}{12} \times 100 = 208.3$

நமது எடுத்துக்காட்டில் ஒரே ஒரு பொருளை மாத்திரம் தான், குறியீட்டெண் கணிக்கும் போது கருத்தில் கொண்டோம். ஆனால் நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் பல வகையான பல பொருள்களைக் கையாள வேண்டியுளது. எனவே நமது குறியீட்டெண் பல பொருள்களையும் பிரதிபலிப்பதாயிருக்க வேண்டும். ஆகவே ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல பொருள்களைப் பற்றியுள்ள முறைகள் பற்றியே நாம் கவனிக்க வேண்டியுள்ளது. பல வழிகள் உள. தனித்தனியாக ஒவ்வொரு முறையையும் பார்ப்போம்.

எளிய கூட்டு முறை (Simple Aggregative Method)

இங்கே 5 வெவ்வேறு பொருள்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பொருளின் மூல அளவிற்கான விலை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **எளிய கூட்டு முறையில் விலை குறியீட்டெண் கணிப்போம்.**

தானியம்	ஒரு குவிண்டால் அளவின் விலை (ரூ)		
	1960	1965	1970
அரிசி	51	60	65
கோதுமை	54	65	70
சோளம்	48	60	70
கம்பு	45	65	70
தினை	42	50	55
மொத்தம்	240	300	330

1960 விலை குறியீட்டெண் $= \frac{240}{240} \times 100 = 100.0.$

1965 விலை குறியீட்டெண் $= \frac{300}{240} \times 100 = 125.0.$

1970ம் ஆண்டில் குறியீட்டெண் $= \frac{330}{240} \times 100 = 137.5$

நடப்பு ஆண்டில், எல்லாப் பொருள்களின் மூல அளவு விலைகளைக் கூட்டிக் கிடைத்த மொத்தத்தை, அடிப்படை ஆண்டில் உள்ள எல்லாப் பொருள்களின் மூல அளவு விலைகளைக் கூட்டிக் கிடைத்த அளவால் வகுத்துப் பின்னர் 100 கொண்டு பெருக்கவும்.

$$I_{on} = \frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} \times 100$$

நமது எடுத்துக்காட்டில் வெவ்வேறு பொருள்களை எடுத்துள்ளோம். இங்கு எல்லாப் பொருள்களின் அளவைகள் ஒன்று போன்றதே (குவிண்டால்). ஆனால் சில வேளைகளில் பொருள்களின் அளவைகள் வெவ்வேறு விதமாக இருக்கும் என்றாலும், கணிப்பு முறை முன் போன்றதே.

பொருள்	மூல அளவு	மூல அளவின் விலை (ரூ) 1960	1965
அரிசி	கிலோ	2.00	2.50
எண்ணெய்	லிட்டர்	4.00	5.00
துணி	மீட்டர்	5.00	7.25
தேங்காய்	எண்ணிக்கை	1.00	1.25
		12.00	16.00

$$\text{குறியீட்டெண்} = \frac{16}{12} \times 100 = 133.33$$

கீழ் வருமாறு வாய்பாட்டை எழுதலாம்.

$$\frac{P_{1n} + P_{2n} + P_{3n} + P_{4n}}{P_{10} + P_{20} + P_{30} + P_{40}} \times 100$$

இங்கு 1, 2, 3, 4 என்று கொடுத்திருப்பவை எல்லாம் பொருள்களின் வரிசை எண்ணைக் குறிக்கும்.

n — நடப்பு ஆண்டைக் குறிக்கும்

o — அடிப்படை ஆண்டைக் குறிக்கும்

p — விலையைக் குறிக்கும்

$$\frac{\Sigma P_n}{\Sigma P_o} \times \frac{100}{1}$$

குறைகள்

இம்முறையிலுள்ள மிகப் பெரும் குறை என்னவெனில் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் ஒரே விதமான முக்கியத்துவமே கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு பொருளிலும் ஒரே ஒரு மூல அளவுப் பொருளின் விலையே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆனால் நமது வாழ்க்கையில் வெவ்வேறு பொருள்களுக்கு

வெவ்வேறு விதமான முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படுகிறது. மேலும் வெவ்வேறு பொருள்களின் விலை வெவ்வேறு அளவையில் கொடுக்கப்படுகிறது. எல்லாப் பொருள்களின் விலையையும் ஒரே கிலோ கிராம் என்ற ஒரே அளவைக்கு மாற்றி, கணித்துக் கிடைக்கும் விலைக் குறியீட்டு எண் முன்னர் கணித்த விலைக் குறியீட்டு எண்ணைவிட வேறுபட்டிருக்கும். எனவே, எளிய கூட்டு முறையில் கணிக்கப்படும் விலைக் குறியீட்டு எண் உண்மையான விலையைப் பிரதிபலிப்பதாக இருக்க வேண்டும்.

விகிதங்களின் எளிய சராசரி (Simple average of relatives)

விலைக் குறியீட்டு எண், விலை மாற்றங்களின் விகிதங்களைக் குறிக்கும் என்று முன்பு கண்டோம். எனவே, பொருள்களின் விலையை அப்படியே எடுத்துக் கொள்ளாது விலை விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி விலைக் குறியீட்டு எண் கணிக்க முயலலாம். முன்னர் உள்ள அதே எடுத்துக்காட்டையே பார்ப்போம்.

பொருள்	அளவு	ஒரு மூல அளவின் விலை 1960 ரூ.	1965 ரூ.		விலை விகிதம்
அரிசி	கிலோ	2.00	2.50	$\frac{2.50}{2.00}$	= 1.25
எண்ணெய்	லிட்டர்	4.00	5.00	$\frac{5.00}{4.00}$	= 1.25
துணி	மீட்டர்	5.00	7.25	$\frac{7.25}{5.00}$	= 1.45
தேங்காய்	எண்ணிக்கை	1.00	1.25	$\frac{1.25}{1.00}$	= 1.25
				மொத்தம்	5.20

விலை விகிதங்களின் மொத்தம் 5.20

பொருள்களின் எண்ணிக்கை 4

சராசரி $\frac{5.20}{4} = 1.30$

வாய்பாடு

$$\frac{\frac{P_{n1}}{P_{01}} + \frac{P_{n2}}{P_{02}} + \frac{P_{n3}}{P_{03}} + \frac{P_{n4}}{P_{04}}}{4} \times 100$$

$$\frac{\sum \frac{P_n}{P_o} \times 100}{N}$$

N. பொருள்களின் எண்ணிக்கை

n. நடப்பு ஆண்டு

c. அடிப்படை ஆண்டு

முன் உள்ள முறையில் விலை விகிதங்களின் எளிய கூட்டுச் சராசரியின் அடிப்படையில் விலைக் குறியீட்டு எண் கண்டு பிடித்தோம். இவ்வாறு கூட்டுச் சராசரி விலை விகிதத்திற்குப் பதிலாக விலை விகிதங்களின் பெருக்கற் சராசரியைப் பயன் படுத்தலாம். அப்போது வாய்பாடும் கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$I = \pi \left(\frac{P_n}{P_o}\right)^{1/N} \times 100$$

முன்னர் கணித்துள்ள விலை விகிதங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பொருள்	விலை விகிதம்
அரிசி	1.25
எண்ணெய்	1.25
துணி	1.45
தேங்காய்	1.25

விலை விகிதங்களின் பெருக்கற் சராசரி

$$I = \pi \left(\frac{P_n}{P_o}\right)^{1/N}$$

$$= (1.25 \times 1.25 \times 1.45 \times 1.25)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\log 1.25 + \log 1.25 + \log 1.45 + \log 1.25}{4}$$

$$= 0.0969 + 0.0969 + 0.1614 + 0.0969$$

$$= \frac{0.4521}{4} = 0.1130$$

பெருக்கற் சராசரி

$$= 1.2970$$

குறியீட்டு எண் $= 1.2970 \times 100$

$$= 129.7$$

கூட்டுச் சராசரியைக் கையாண்ட போது விலையின் குறியீட்டெண் 130 ஆகும். ஆனால் பெருக்கற் சராசரியைக் கையாண்ட போது விலைக் குறியீட்டெண் 129.7 என்றாகியது ஏனெனில், கூட்டுச் சராசரி, பெருக்கல் சராசரியை விட எப்போதும் அதிகமாக இருக்கும் என்ற நியதியால்தான் என்று கூற வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரியை விட பெருக்கற் சராசரியே சிறந்தது

குறியீட்டெண்ணைப் பொறுத்த அளவில் நாம் பொருள்களின் மதிப்புகளில் உண்டாகும் மாற்றத்தை விட மாற்றல் விகிதங்களிலேயே கருத்தாயுள்ளோம். எனவே, பெருக்கல் சராசரியே கூட்டுச் சராசரியை விடச் சிறந்தது. ஏனென்றால், கூட்டுச் சராசரி விலைகளின் மதிப்பின் மாற்றத்தை மாத்திரம் குறிக்கும். ஆனால் பெருக்கல் சராசரியோ மாற்றல் விகிதங்களைக் குறிக்கும். ஆனால், கணிப்பிலுள்ள சிரமம் குறைவதன் காரணமாக கூட்டுச் சராசரியே பெரிதும் கையாளப்படுகிறது.

குறைகள்

எளிய கூட்டு முறையில், கூறிய இரு முறைகளில், பல வகைப் பொருள்களின் பல வகை மூல அளவுகளால் உண்டாகும்

குறை இதில் தவிர்க்கப்படுகிறது. எனினும், முதலில் கூறியது போல் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் ஒரே சமமான முக்கியத் துவம் கொடுக்கப்படுகிறது என்ற குறை இதிலும் உள்ளது. இக்குறையை, ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதற்கேற்றவாறு முக்கி யத்துவம் கொடுத்துத் தவிர்க்கலாம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதற்குரிய முக்கியத்துவம் கொடுத்துக் கணிக்கப் படும் முறை நிறையிட்ட (Weighted) முறை என்று கருதப்படும். இம்முறையில் கணித்த குறியீட்டெண் நிறையிட்ட குறியீட் டெண் எனப்படும்.

நிறையிட்ட குறியீட்டெண் (Weighted Index Number)

ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதற்கேற்றவாறு முக்கியத்துவம் கொடுத்துக் கணிக்கப்படும் குறியீட்டெண் எடைகொள் குறி யீட்டெண் எனப்படும். ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் கொடுக்கப் படும் எடை அப்பொருளின் பொருளாதார முக்கியத்துவத்தைப் வெளிப்படுத்துவதாகவும், பிரதிபலிப்பதாகவும் இருக்க வேண் டும். சில வேளைகளில், பொருள்களின் அளவு எடையாகக் கருதப்படும். சில நேரங்களில் பொருள்களின் மொத்த விலை மதிப்பு எடையாகக் கருதப்படும். எனினும் கீழே கூறப்படும் மூன்று விதமான எடைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எடை வகைகள் (Types of Weights)

1. விலை எடைகள் (Price Weights)

இம்முறையில், குறியீட்டெண் கணிப்பதில் அடங்கியுள்ள விவரங்களுக்கு அப்பொருள்களின் விலைக்கு ஏற்றவாறு முக்கியத் துவம் கொடுக்கப்படும்.

2. அளவு எடை (Quantity Weights)

இம்முறையில் குறியீட்டெண் கணிப்பிற்குள்ளான விவ ரங்களின் அளவின் அடிப்படையில் அப்பொருள்களுக்கு முக்கியத் துவம் அளிக்கப்படும்.

3. விலை மதிப்பு எடை (Value Weights)

இம்முறையில் பொருள்களின் விலை மதிப்பிற்கு ஏற்றவாறு பொருள்களுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படும்.

இரு விதக் கருத்துடையோர் உளர். எடை வேண்டு மென்பதில் எந்தவித கருத்து வேறுபாடு இல்லாத போதும், எதை எடையாகக் கொள்வது என்பதில் கருத்து வேறுபாடு உண்டு. ஒரு சாரார் நடப்பு ஆண்டு விலையையோ அல்லது நடப்பு ஆண்டு அளவையோ அல்லது நடப்பு ஆண்டு விலை மதிப்பையோ எடை யாகக் கொள்ள வேண்டுமென்பர். இன்னொரு சாரார் அடிப் படை ஆண்டு விலை மதிப்பையோ அல்லது அடிப்படை ஆண்டு விலையையோ அல்லது அடிப்படை ஆண்டு அளவையோ எடை யாகக் கொள்ள வேண்டும் என்பர். நாம் இவ்விரு சாராரின் கூற்றையும் ஆராய வேண்டும்.

லெஷ்பியர்ஸ் குறியீட்டு முறை (Laspeyre's Index Method)

இம்முறைப்படி விலைக் குறியீட்டெண் கணிப்பதில் அடிப் படையாண்டு அளவு எடையாகக் கருதப்படுகிறது.

$$I = \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \times 100$$

விலைக் குறியீட்டெண் கணிப்பதற்கு நமக்கு கீழ்காணும் விவரங்கள் தேவைப்படும்.

1. ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அடிப்படை ஆண்டிலும், நடப்பு ஆண்டிலும் உள்ள விலை விவரம் (P_o, P_n)
2. ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அடிப்படை ஆண்டிலுள்ள அளவு விவரம் (q_o)

கூட்டு முறை (Aggregate Method)

இம்முறை கூட்டு முறை எனப்படும். ஏனெனில் விலை மற்றும் அளவுகளின் பெருக்குப் பலன் விலை மதிப்பைக் கொடுப் பதால் $(p \times q)$ $\sum pq$ மொத்த மதிப்பைக் கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கட்கு விலைக் குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

அட்டவணை 1

பொருள்	மூல அளவு	அடிப்படை ஆண்டில் வாங்கிய அளவு	அடிப்படை ஆண்டில் மூல அளவு விலை ரூ.	நடப்பு ஆண்டில் மூல அளவின் விலை (ரூ)
அரிசி	(கி.கி.)	20	2.00	2.50
எண்ணெய்	(லிட்)	5	4.00	5.00
துணி	(மீட்)	10	5.00	7.25
தேங்காய்	(எண்ணிக்கை)	12	1.00	1.25

மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து கீழே கொடுத்துள்ள அட்டவணையைத் தயார் செய்யலாம்.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டில் உள்ள மொத்த மதிப்பு	நடப்பு ஆண்டின் விலையில் அடிப்படை ஆண்டு அளவிற்கான மொத்த மதிப்பு
1	2	3
அரிசி	20 × 2 = 40.00	20 × 2.50 = 50.00
எண்ணெய்	5 × 4 = 20.00	5 × 5.00 = 25.00
துணி	10 × 5 = 50.00	10 × 7.25 = 72.50
தேங்காய்	12 × 1 = 12.00	12 × 1.25 = 15.00
	122.00	162.50

அடிப்படை ஆண்டு பொருளின் மதிப்பு, பொருளின் விலை வீதத்தையும், பொருளின் அளவையும் பெருக்கினால் அட்டவணை (2) 2வது காலத்தில் கொடுத்தது போல் கிடைக்கும். அட்டவணை (2) 3வது காலத்தில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு பொருள்களின் நடப்பு ஆண்டு விலையை அடிப்படை ஆண்டு அளவுகளால் பெருக்கிக் கிடைத்தாகும். இரண்டாவது அட்டவணையிலிருந்து கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கள் கிடைக்கப் பெறும்.

(1) $\Sigma P_n q_o$ = ரூ. 162.50

(2) $\Sigma P_o q_o$ = ரூ. 122.00

எனவே விலைக் குறியீட்டெண் $= \dfrac{162.50}{122.00} \times 100$

$= 133.2$

சராசரி விகிதம் அல்லது விலை விகிதங்களின் சராசரி

லெஸ்பியர் வாய்பாட்டைச் சராசரி விலை விகிதங்களின் எடை கொள் சராசரியாகவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$P_{on} = \frac{\sum \frac{P_n}{P_o} \times P_o q_o}{\sum \frac{P_o}{P_o} \times P_o q_o} \times 100$$

$$= \frac{\sum \frac{P_n}{P_o} \times P_o q_o}{\Sigma P_o q_o} \times 100$$

இவ்வாய்பாட்டில் பொருள்களின் அடிப்படை ஆண்டில் உள்ள விலை மதிப்பே எடையாக கொள்ளப்படுகிறது.

கீழேயுள்ள விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால்தான் இம்முறையைப் பின்பற்ற முடியும்.

1. பொருள்களின் அடிப்படை ஆண்டிலுள்ள விலை
2. பொருள்களின் நடப்பு ஆண்டின் விலை
3. பொருள்களின் அடிப்படை ஆண்டிலுள்ள விலை மதிப்பு

முன்னர் கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டையே மீண்டும் நோக்குவோம்.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு அளவு	அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதம் ரூ.	நடப்பு ஆண்டு விலை வீதம் ரூ.
அரிசி	20 கிலோ	2.00	2.50
எண்ணெய்	5 லிட்டர்	4.00	5.00
துணி	10 மீட்டர்	5.00	7.20
தேங்காய்	12	1.00	1.25

பொருள்களின் அடிப்படை ஆண்டு விலை விகிதத்தை அடிப்படை ஆண்டு அளவால் பெருக்கினால் அடிப்படை ஆண்டு மதிப்பு கிடைக்கும்.

அரிசி	$20 \times 2 =$	ரூ. 40
எண்ணெய்	$5 \times 4 =$	ரூ. 20
துணி	$10 \times 5 =$	ரூ. 50
தேங்காய்	$12 \times 1 =$	ரூ. 12
		ரூ. 122

விலை விகிதங்களை கணிப்போம்

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு விலை ரூ.	நடப்பு ஆண்டு விலை ரூ.	விலை விகிதம்	விலை விகிதம் × அடிப்படைஆண்டு விலை மதிப்பு
அரிசி	2.00	2.50	1.25	$40 \times 1.25 =$ 50.00
எண்ணெய்	4.00	5.00	1.25	$20 \times 1.25 =$ 25.00
துணி	5.00	7.25	1.45	$50 \times 1.45 =$ 72.50
தேங்காய்	1.00	1.25	1.25	$12 \times 1.25 =$ 15.00
			மொத்தம்	162.50

(1) $\sum \frac{P_n}{P_o} \times p_o q_o = 162.50$

(2) $\Sigma p_o q_o = 122.00$

குறியீட்டெண் $= \frac{162.50}{122.00} \times 100 = 133.2$

கீழே உள்ள வாய்பாட்டின் மூலம் கணித்த விலைக் குறியீட்டெண்கள் ஒன்றே என்று தெரிகின்றது.

(1) $\frac{\Sigma P_n \; q_o}{\Sigma p_o \; q_o} \times 100 = 133.2$

(2) $\frac{\sum \frac{P_n}{p_o} \times P_o q_o}{\Sigma P_o q_o} \times 100 = 133.2$

எனவே இரு வாய்பாடுகளும் ஒன்றே என்று தெரிகிறது.

பாஸ்சஸ் குறியீட்டெண் (Paasche's Index Number)

இம்முறையில் நடப்பு ஆண்டில் உள்ள அளவு எடையாக கருதப்படுகிறது. கீழேயுள்ள விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், நாம் பாஸ்சஸ் முறையில் குறியிட்டெண் கணிக்கலாம்.

(1) ஒவ்வொரு பொருளின் அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதம்

(2) ஒவ்வொரு பொருளின் நடப்பு ஆண்டு விலை வீதம்

(3) ஒவ்வொரு பொருளின் நடப்பு ஆண்டு அளவு

$$I = \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n} \times 100$$

கூட்டு முறை (Aggregate Method)

மேலுள்ள வாய்பாட்டில் நாம் உண்மையில் கையாண்டது பொருள்களின் நடப்பு ஆண்டு விலை வீதமும் அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதமும் ஆகும். ஆனால் பயன்படுத்திய அளவோ நடப்பு ஆண்டு அளவாகும். முன்னமுள்ள அதே எடுத்துக்காட்டில் **நடப்பு ஆண்டு அளவை அமைத்துக் காண்போம்.**

பொருள்கள்	மூலஅளவு	அளவு	அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதம் ரூ.	நடப்பு ஆண்டு விலை வீதம் ரூ.
அரிசி	கிலோ	24	2.00	2.50
எண்ணெய்	லிட்டர்	·8	4.00	5.00
துணி	மீட்டர்	12	5.00	7.25
தேங்காய்	எண்ணிக்கை	16	1.00	1.25

மேலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து புதிதாக ஒரு அட்டவணை தயார் படுத்த வேண்டும். அதில் விலை வீதத்தைப் பொருளின் அளவால் பெருக்கிய விலை மதிப்பு இருக்க வேண்டும். பெருக்கிக் கிடைத்த பொருள்களின் விலை மதிப்பு அதில் அடங்கி இருக்க வேண்டும்.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு விலை மதிப்பு ரூ.	நடப்பு ஆண்டு விலை மதிப்பு ரூ.
அரிசி	$24 \times 2 = 48$	$24 \times 2.50 = 60$
எண்ணெய்	$8 \times 4 = 32$	$\cdot 8 \times 5.00 = 40$
துணி	$12 \times 5 = 60$	$12 \times 7.25 = 87$
தேங்காய்	$16 \times 1 = 16$	$16 \times 1.25 = 20$
	156	207

1. நடப்பு ஆண்டில் விலை மதிப்பு : $\sum P_n q_n$ = Rs. 207

2. அடிப்படை ஆண்டில் விலை மதிப்பு : $\sum P_o q_n$ = Rs. 156

$$\therefore \text{விலைக் குறியீட்டெண்} = \frac{207}{156} \times 100 = 132.7$$

சராசரி விகிதம் (அல்லது) சராசரி விலை விகிதம் (Average of Ratios (or) Average price Relatives)

பாஸ்சஸ் வாய்பாட்டை விலை விகிதங்களின் எடை கொள் சராசரியாகவும் கருதலாம்.

$$\text{குறியீட்டெண்} = \frac{\sum \frac{P_n}{P_o} \times p_o q_n}{\sum \frac{P_o}{P_o} \times P_o q_n} \times 100$$

இந்த வாய்பாட்டில் பொருள்களின் நடப்பு ஆண்டு அளவிற்கான விலை மதிப்பு, அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதத்தில் கணிக்கப்பட்ட விலை மதிப்பு $q_n P_o$ அல்லது $P_o q_n$ எடையாகக் கருதப்படுகிறது.

கீழேயுள்ள விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் இம்முறை பின்பற்றப்படும்.

1. பொருள்களின் அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதம்
2. பொருள்களின் நடப்பு ஆண்டு விலை வீதம்
3. நடப்பு ஆண்டு அளவில் அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதத்தில் கணிக்கப்பட்ட பொருள்களின் விலை மதிப்பு

பொருள்கள் (1)	நடப்பு ஆண்டு அளவு (2)	அடிப்படை ஆண்டு விலை வீதம் ரூ. (3)	நடப்பு ஆண்டு விலை வீதம் ரூ. (4)
அரிசி	24 கி	2.00	2.50
எண்ணெய்	8 லி	4.00	5.00
துணி	12 மீ	5.00	7.25
தேங்காய்	16 எண்ணிக்கை	1.00	1.25

இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரைகளை பெருக்கினால் விலை மதிப்புக் கீழ் கண்டவாறு கிடைக்கும்.

பொருள்கள்	மதிப்பு
அரிசி	48
எண்ணெய்	32
துணி	60
தேங்காய்	16
	156

பொருள்கள்	விலைவிகிதம்	விலை விகிதம் × எடை
அரிசி	1.25	1.25×48 = 60
எண்ணெய்	1.25	1.25×32 = 40
துணி	1.45	1.45×60 = 87
தேங்காய்	1.25	1.25×16 = 20
		207

$$\text{குறியீட்டெண்} = \frac{207}{156} \times 100 = 132.7$$

கீழேயுள்ள வாய்பாடுகளின் மூலம் கணித்த குறியீட்டெண்கள் ஒன்றே யென்று கண்டோம்.

(1) $$\frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n} \times 100$$

(2) $$\frac{\Sigma \frac{P_n}{P_o} \times p_o q_n}{\Sigma \frac{P_o}{P_o} \times p_o q_n} \times 100$$

லெஷ்பியர் முறையும் பாஸ்சஸ் முறையும் ஒப்பீடு

1. இவ்விரு வாய்பாடுகளிலும் பொருள்களின் அடிப்படை ஆண்டு விலையும், நடப்பு ஆண்டு விலையும் கையாளப் படுகின்றன.

2. பயன்படுத்தப்பட்ட விலை விகிதங்களும் ஒன்றே $\frac{P_n}{P_o}$

3. விலைகளைக் கையாளும் போது லெஷ்பியர் முறையில் அடிப்படை ஆண்டு அளவை எடையாகக் கொள்கிறோம்.

4. அசல் விலைகளையே கையாளும் போது, பாஸ்சஸ் முறை யில் நடப்பு ஆண்டு அளவை எடையாகக் கொள்கிறோம்.

5. அசல் விலைகளுக்குப் பதிலாக விலை விகிதங்களை கையா ளும் பொழுது லெஷ்பியர் முறையில் அடிப்படை ஆண்டில் பொருளின் செலவை எடையாகக் கொள்கிறோம்.

6. அசல் விலைகளுக்குப் பதிலாக விலை விகிதங்களைக் கையா ளும் போது பாஸ்சஸ் முறையில் உண்மையான செலவுக்குப் பதில் எதிர் பார்க்கப்படும் செலவை எடையாகக் கொள் கிறோம். (அடிப்படை ஆண்டு விலையில் நடப்பு ஆண்டு அளவுக்கான பொருள்களின் மதிப்பு கற்பனையே அன்றி உண்மை அல்ல)

5 மற்றும் 6 இனங்களில் உள்ள வேறுபாட்டினால் பாஸ்சஸ் முறையை விட லெஷ்பியர் முறையே விரும்பப்படுகிறது.

மார்ஷல் எட்ச்வொர்த் குறியீட்டு முறை (Marshall-Edgeworth-Index Method)

லெஷ்பியர் மற்றும் பாஸ்சஸ் முறைகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் வாய்பாட்டின் மூலம் விலை குறியிட்டெண் கணிக்க லாம். இப் புது முறையில், நடப்பு ஆண்டின் அளவும், q_n அடிப்படை ஆண்டு அளவும் q_o சேர்ந்த மொத்த எடை q_o+q_n எடையாகக் கருதப்படுகிறது.

$$\text{விலை குறியீட்டு எண்} = \frac{\Sigma P_n (q_o + q_n)}{\Sigma P_o (q_o + q_n)} \times 100$$

$$\text{(or)} \frac{\Sigma P_n q_o + \Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_o + \Sigma P_o q_n} \times 100$$

இம்முறையில் (q_o+q_n) என்ற எடை ஆண்டுதோறும் மாற்றப்படுகிறது. எனவே, ஒப்பீடுக்கு ஒத்து வருவதில்லை. ஆனால் பாஸ்சஸ் முறையில் கையாளப்படும் எடையான $p_o q_o$ நிலையானது. ஆகவே குறியிட்டெண்களை நேரடியாக ஒப்பிடலாம்.

பொருள்கள்	அளவு		விலை வீதம் ரூ.	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
அரிசி	20	24	2.00	2.50
எண்ணெய்	5	8	4.00	5.00
துணி	10	12	5.00	7.25
தேங்காய்	12	16	1.00	1.25

நாம், அடிப்படை ஆண்டு, நடப்பு ஆண்டு அளவுகளை எடையாகக் கொள்ளும் போது எடை கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

அரிசி	20+24	= 44 கி.
எண்ணெய்	5+8	= 13 லி.
துணி	10+12	= 22 மீ.
தேங்காய்	12+16	= 28 எண்ணிக்கை

எடை கணிக்கப்பட்ட பின்னர் நாம் கூட்டு முறையைப் பின்பற்றலாம்.

பொருள்கள்	அளவு எடை	அடிப்படை ஆண்டிலுள்ள விலை மதிப்பு ரூ.	நடப்பு ஆண்டு விலை மதிப்பு ரூ.
அரிசி	44	44×2 = 88	44×2.50 =110.00
எண்ணெய்	13	13×4 = 52	13×5.00 = 65.00
துணி	22	22×5 = 110	22×7.25 =159.50
தேங்காய்	28	28×1 = 28	28×1.25 = 35.00
		278	369.50

$$\Sigma P_n (q_o + q_n) = 369.50 \quad \Sigma P_o (q_o + q_n) = 278$$

$$\text{குறியீட்டெண்} = \frac{369.50}{278} \times 100 = \mathbf{132.9}$$

அளவு குறியீடு

இதுவரையில் விலைக் குறியீட்டெண் கணிப்பது பற்றிக் கண்டோம். பின் வரும் விவரங்களையும் கையாண்டோம்.

1. விலை விகிதம் $= \dfrac{P_n}{P_o}$
2. கீழே கொடுத்துள்ள ஏதாவது ஓர் எடை
3. நடப்பு ஆண்டு அளவு (q_n)
4. அடிப்படை ஆண்டு அளவு (q_o)
5. அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டுகளின் மொத்த அளவு (q_o+q_n)

இதே போன்று நாம் அளவு குறியிட்டு Q எண்ணையும் கணிக்கலாம். இதில் விலை விகிதங்களுக்குப் பதிலாக $\dfrac{q_n}{q_o}$ அளவு விகிதங்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

பொருள்களின் விலைகள் எடைகளாக பயன்படுத்தப்படும். கீழேயுள்ள விவரங்கள் கையாளப்படும்.

1. அளவு விகிதம்
2. கீழே கொடுத்துள்ள ஏதாவது ஓர் எடை
3. அடிப்படை ஆண்டு விலை p_o
4. நடப்பு ஆண்டு விலை p_n
5. இவ்விரண்டு ஆண்டுகளின் மொத்த விலை $(p_o + p_n)$

இதற்கான வாய்பாடும் கீழ் வருமாறு

1. $$\frac{\Sigma q_n p_o}{\Sigma q_o p_o} \times 100$$

2. $$\frac{\Sigma q_n p_n}{\Sigma q_n p_o} \times 100$$

3. $$\frac{\Sigma q_n (p_n + p_o)}{\Sigma q_o (p_n + p_o)} \times 100$$

விலை மதிப்பீட்டுக் குறியெண் (Value Index)

விலைகளுக்கும், அளவுகளுக்கும் குறியிட்டெண் கணித்தது போல் விலை மதிப்புகளுக்கும் குறியிட்டெண் கணிக்கலாம். பொருள்களின் விலையை அளவுகளால் பெருக்கினால் விலை மதிப்பீடு கிடைக்கும்.

$(P_n q_n)$ = நடப்பு ஆண்டு விலை மதிப்பு

$(P_o q_o)$ = அடிப்படை ஆண்டு விலை மதிப்பு

$$\text{குறியீட்டெண் } V = \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma p_o q_o} \times 100$$

பொருள்	அளவு		விலை வீதம் (ரூ)	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
அரிசி	20	24	2.00	2.50
எண்ணெய்	5	8	4.00	5.00
துணி	10	12	5.00	7.25
தேங்காய்	12	16	1.00	1.25

மேலே கொடுத்துள்ள அட்டவணையிலிருந்து பொருள்களின் நடப்பு ஆண்டு மதிப்பையும் அடிப்படை ஆண்டு மதிப்பையும் கணிக்கலாம்.

பொருள்	அடிப்படை ஆண்டில் விலை மதிப்பு ரூ.	நடப்பு ஆண்டில் விலை மதிப்பு ரூ.
அரிசி	40	60
எண்ணெய்	20	40
துணி	50	87
தேங்காய்	12	20
	122	207

$$\text{குறியிட்டெண்} = \frac{207}{122} \times 100 = 169.7$$

பிஷரின் சீரிய குறியீட்டெண் (Fisher's Ideal Index Number)

இது லெஷ்பியர் விதிக்கும், பாஸ்சஸ் விதிக்கும் நடுவில் உள்ள பொருத்தமானதோர் விதியாகும். இது பிஷரின் சீரிய (Ideal) குறியீட்டெண் எனப்படும். உண்மையில், முன்னர் இருவரின் முறைகளின் பெருக்கல் சராசரியாகும் இது.

$$\text{குறியீட்டெண்} = \sqrt{\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}} \times 100$$

சீரிய குறியீட்டெண் (Ideal Index Number)

பின்வரும் காரணங்களால் இது சீரிய குறியீட்டெண் எனப்படுகிறது.

1. விகித மாற்றங்களை வெளிப்படுத்துவதற்கு பெருக்கல் சராசரியே சிறந்ததாகும் என்பது தெரியும். குறியீட்டு எண் மாற்றங்களின் விகிதங்களை வெளிப்படுத்துவதாலும் 'பிஷரின் முறை' பெருக்கல் சராசரியை ஒட்டி இருப்பதாலும் இம்முறை இதர முறைகளைவிட சிறந்தது எனப்படுகிறது.

2. இக்குறியீட்டு கணிப்பில் அடிப்படை ஆண்டு, நடப்பு ஆண்டு என்ற இரு ஆண்டுகளின் விலை வீதமும் அளவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

3. இது கீழேயுள்ள மூன்று சோதனைகளுக்கும் ஏற்றவாறு உள்ளது.

அ. பொருள் மாற்றுச் சோதனை

ஆ. காலமாற்றுச் சோதனை

இ. காரணிகள் மாற்றுச் சோதனை

என்றாலும், இக்குறியீட்டெண் கணிப்பதில் உள்ள சிரமங்கள் காரணமாக இம்முறை நடப்பில் இல்லை.

கீழே கொடுத்துள்ள விவரங்கட்கு பிஷரின் சிறிய குறியிட்டெண் கணிப்போம்.

பொருள்	அளவு		விலை வீதம் ரூ.	
	அடிப்படை ஆண்டு q_o	நடப்பு ஆண்டு q_n	அடிப்படை ஆண்டு p_o	நடப்பு ஆண்டு p_n
அரிசி	20	24	2.00	2.50
எண்ணெய்	5	8	4.00	5.00
துணி	10	12	5.00	7.25
தேங்காய்	12	16	1.00	1.25

1. முதலில் லெஷ்பியர் முறைப்படி குறியீட்டெண் கணிக்க வேண்டும்.

$$I = \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \times 100$$

$$= \frac{(50 + 25 + 72.50 + 15)}{(40 + 20 + 50 + 12)} \times 100 = \frac{162.50}{122.00} \times 100$$

$$= \mathbf{133.2}$$

2. பாஸ்சஸ் முறைப்படி குறியீட்டெண் கணிக்க வேண்டும்

$$I = \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma p_o q_n} \times 100$$

$$= \frac{(60 + 40 + 87 + 20)}{(48 + 32 + 60 + 16)} \times 100$$

$$= \frac{207}{156} \times 100$$

$$= 132.7$$

3. இவ்விரு குறியீட்டெண்களின் பெருக்குப் பலன் காண வேண்டும்.

$$133.2 \times 132.7$$

4. இப்பெருக்கற் பலனின் வர்க்க மூலம் காண வேண்டும்.

$$I = \sqrt{133.2 \times 132.7}$$

இவ் அளவுகளுக்கான மடக்கை அளவுகளை இரு பக்கங்களிலும் எடுத்தால், கிடைப்பது

$$\log I = \frac{\log 133.2 + \log 132.7}{2}$$

$$= \frac{2.1245 + 2.1233}{2}$$

$$= \frac{4.2478}{2}$$

$$= 2.1239.$$

குறியீட்டெண் $=$ Antilog cf $2.1239.$

$$= 132.9$$

நிலையான அடிப்படை மற்றும் சங்கிலித் தொடர் அடிப்படைக் குறியீட்டெண்கள்

நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டெண் (Fixed Base Index Number)

பல ஆண்டுகளின் விவரங்கள் அடங்கியதோர் வரிசை நம்மிடம் இருக்குமானால் அதில் ஏதாவது ஓர் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு இதர ஆண்டுகளுக்கான குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கலாம். இதுவே நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டெண் எனப்படும். இம்முறையில், பொதுவான ஓர் அடிப்படை ஆண்டு இருப்பதால், ஒப்பீடு செய்யும் போது பயனுள்ள முறையில் செய்ய முடியும். இதற்கான எடுத்துக்காட்டு வருமாறு.

ஆண்டு	விலை ரூ.	குறியீட்டெண்
1960	20	100
1961	25	125
1962	40	200
1963	50	250
1964	70	350

இதில் 1960 ஐ அடிப்படையாண்டாகக் கொண்டு இதர ஆண்டுகளுக்கான குறியீட்டெண்கள் கணிக்கப்பெற்றுள்ளன.

சங்கிலித் தொடர் குறியீட்டெண் (Chain Base Index Number)

இம்முறையில் ஓர் ஆண்டைப் பொதுவான அடிப்படையாண்டாக எடுத்துக்கொள்ளுவதில்லை. மாறாக, ஒவ்வொரு ஆண்டின் குறியீட்டெண்களுக்கும் அதன் முன் ஆண்டை அடிப்படையாக எடுத்துக் கொள்வது மரபு. இவ்வாறு ஒவ்வொரு ஆண்டையும் அதற்கு முன் உள்ள ஆண்டோடு இணைப்பதால் இது சங்கிலித் தொடர் எனப்படுகிறது. சங்கிலித் தொடர் முறையில் குறியீட்டெண் கணிப்போம்.

ஆண்டு	மதிப்பு	சங்கிலித் தொடர் குறியீட்டெண்
	ரூ.	
1960	20	$\frac{20}{20} \times 100 = 100$
1961	25	$\frac{25}{20} \times 100 = 125$
1962	40	$\frac{40}{25} \times 100 = 160$
1963	50	$\frac{50}{40} \times 100 = 125$
1964	70	$\frac{70}{50} \times 100 = 140$

சங்கிலித் தொடரிலிருந்து நிலையான தொடருக்குரிய மாற்றம்
(Conversion from chain base to the fixed base)

சங்கிலித் தொடர் குறியீட்டெண்ணை நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டெண்ணாகவும் மாற்றலாம்.

ஆண்டு	சங்கிலித் தொடர் குறியீட்டெண்	நிலையான அடிப்படைக் குறியீட்டெண்
1960	100	$\frac{100}{100} \times 100 = 100$
1961	125	$\frac{125}{100} \times 100 = 125$
1962	160	$\frac{125}{100} \times \frac{160}{100} \times 100 = 200$
1963	125	$\frac{125}{100} \times \frac{160}{100} \times \frac{125}{100} \times 100 = 250$
1964	140	$\frac{125}{100} \times \frac{160}{100} \times \frac{125}{100} \times \frac{140}{100} \times 100 = 350$

சங்கிலித் தொடரில் உள்ள பயன்கள்

(1) பொதுவாக மக்கள், பழைய ஏதோ ஓர் ஆண்டை விட சென்ற ஆண்டுடன் ஒப்பிடுவதையே அதிகமாக விரும்புவர். இத்தகைய இடங்களில் சங்கிலித் தொடரே சிறந்த முறையாகும்.

(2) இதில் மிகக் குறுகிய காலங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களையும் கருத்தில் கொள்வதாகும். இதில் புதிதாக சில விவரங்களைச் சேர்ப்பதற்கும் சில விவரங்களைச் தவிர்ப்பதற்கும் வழி கோலும்.

(3) அடுத்துள்ள ஆண்டுகளை விரைவில் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வழி கோலும்.

குறியீட்டெண்ணின் நிலையான தன்மைக்குரிய சோதனை (Test of consistency for index number)

பிசரின் சீரிய குறியீட்டெண்ணைப் பற்றிப் படிக்கும் போது, கீழேயுள்ள சோதனைகளைப் பற்றியும் குறிப்பிட்டோம்.

1. பொருள் மாற்றுச் சோதனை
2. கால மாற்றுச் சோதனை
3. காரணிகள் மாற்றுச் சோதனை

மேலும் இச்சோதனைகளைப் பூர்த்தி செய்யும் குறியீட்டெண்ணே சிறந்ததெனக் கூறவும் கண்டோம். இச் சோதனைகள் குறித்து விரிவாகக் காண்போம்.

1. பொருள் மாற்றுச் சோதனை (Commodity Reversal Test)

குறியீட்டெண் கணிப்பில், ஒரே ஒரு பொருளை மாத்திரம் கவனியாது ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல பொருள்களையும் கவனிக்க வேண்டியிருக்கும் என்று முன்பு கூறினோம். இப்பொருள்கள் ஏதாவது ஒரு வரிசையில் அமைக்கப் பெற வேண்டும். இப்பொருள்களின் வரிசை முறையை மாற்றி புதிதாக குறியீட்டெண்கள் கணித்தால், வரிசையை மாற்றாது முன்னர் கணித்துள்ள குறியீட்டெண்ணிற்கும் தற்போது உள்ள குறியீட்டெண்ணிற்கும் வேறுபாடு இராது. ஏனெனில் இவ்வாறு வரிசையை மாற்றியமைக்கும் போது, புதிதாக ஏதாவது ஒரு பொருளைப் புகுத்துதல் அல்லது ஏற்கனவேயுள்ள ஒரு பொருளை அகற்றுதல்

என்ற நிலைக்கு இடமில்லை. ஏற்படும் மாற்றமெல்லாம் பொருள்களின் கணிப்பில் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் வரிசை முறையில் தான் உளது. வரிசை முறை மாற்றப்படுவதால் குறியீட்டெண் மதிப்பில் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படுவதில்லை. எனவே ஒரு சாரார் இதை ஒரு சோதனை என ஏற்றுக் கொள்வதில்லை.

2. கால மாற்றுச் சோதனை (Time reversal test)

குறியீட்டெண் கணிப்பில் (1) அடிப்படையாண்டு (2) நடப்பாண்டு என இரு காலங்கள் உண்டு என்பதையறிவோம். பொதுவாக நடப்பாண்டிற்குரிய குறியீட்டெண் அடிப்படையாண்டு அடிப்படையில் கணிக்கப்படும். இது போல் அடிப்படையாண்டிற்குரிய குறியீட்டெண்ணை நடப்பு ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டும் கணிக்கலாம். நாம் எதிர் பார்ப்பது முன்னர் உள்ள குறியீட்டெண் அடுத்த குறியீட்டெண்ணின் தலை கீழ் விகிதமாகயிருக்கும் என்பதே. வேறுவிதமாகக் கூறினால் இவ்விருவித குறியீட்டெண்களின் பெருக்குப் பலன் 1 என இருக்கும். எனவே இப்பெருக்குப் பலனின் வர்க்க மூலத்தை 100 கொண்டு பெருக்கினால் கிடைப்பது 100.

நாம், குறியீட்டெண் கணிப்பில் ஒரே ஒரு பொருளை மாத்திரம் எடுத்துக் கொண்டால் மேலே கூறிய நிலை உருவாகும். குறியீட்டெண் கணிப்பில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல பொருள்களை எடுத்துக் கொள்ளும் போதும், மேலும் கூட்டுச் சராசரியைப் பயன்படுத்துந்தோறும் எந்த வித வாய்ப்பாடுகளை பயன் படுத்தினும் மேலே கூறிய நிலை ஏற்பட வாய்ப்பில்லை. இது நன்கு தெரிந்ததே. இதை வாய்பாட்டின் மூலமாகவே காணலாம்.

அ. அடிப்படை ஆண்டு அளவை எடையாகக் கொள்ள (லெஸ்பியர் முறை).

$$I = \frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma p_o q_o}$$

இந்த வாய்பாட்டில் உள்ள n, o என்ற காலங்களுக்கான குறியீடுகளை மாற்றியமைப்போம். வாய்பாடு கீழ்கண்டவாறு மாறும்.

$$I' = \frac{\Sigma P_o q_n}{\Sigma p_n q_n}$$

இவற்றின் பெருக்குப் பலன்

$$I \times I' = \frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_n q_n}$$

இப்பெருக்குப் பலன் 1க்கு சமமாகயிருப்பதில்லை.

ஆ. நடப்பாண்டு அளவை எடையாகக் கொள்ளல் (Pasche's method)

$$I = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}$$

n, *o* என்ற எழுத்துக்களை மாற்றியமைப்போம்.

$$I' = \frac{\Sigma P_o q_o}{\Sigma P_n q_o}$$

$$I \times I' = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_n q_o}$$

பெருக்குப்பலன் 1க்கு சமமில்லை.

இ. பிசரின் சீரிய குறியீட்டெண் (Fisher's Index Number)

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

இதிலுள்ள *n* மற்றும் 0 என்ற எழுத்துக்களை மாற்றி கால மாற்றுச் சோதனைக்கு உட்படுத்துவோம்.

$$\text{விதி} = \sqrt{\frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_n q_n} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_n q_o}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

இரண்டையும் பெருக்கினால் கிடைப்பது

$$\sqrt{\frac{\Sigma\ p_n q_o}{\Sigma\ p_o q_o} \times \frac{\Sigma\ p_o q_o}{\Sigma\ p_o q_n} \times \frac{\Sigma\ p_o q_n}{\Sigma\ p_n q_n} \times \frac{\Sigma\ p_o q_o}{\Sigma\ p_n q_o}}$$

பகுதி தொகுதிகளில் உள்ள சம காரணிகளை வெட்டும் போது கிடைப்பது 1

1. இதன் வர்க்க மூலம் 1

3. காரணிகள் மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test)

விலைக் குறியீட்டெண் கணிப்பில் நாம் (1) விலைகள் (2) அளவுகள் என்ற இரு காரணிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். விலைக் குறியீட்டெண்ணில், அளவுகள் எடைகளாகப் பயன்படு கின்றன.

இவ்விரண்டு காரணிகளான p மற்றும் q என்பவற்றை மாற்றியமைத்தால், நமக்குப் புதியதோர் குறியீட்டெண் கிடைக் கும். இவ்வாறு கிடைக்கும் புதிய குறியீட்டெண் விலையை எடையாகக் கொண்டு கணிக்கப்பெறும் அளவு குறியீட்டெண் ணாகும்.

விலை குறியீட்டெண் மற்றும் அளவு குறியீட்டெண் என்ற இரு குறியீட்டெண்களைப் பெருக்கினால் கிடைப்பது, செலவுக் குறியீட்டெண்ணாகும். ஏனெனில் விலையையும் அளவையும் பெருக்கினால் கிடைப்பது விலை மதிப்பாகும். நமது குறியீட்டெண்களின் கணிப்பில் ஒரே ஒரு பொருளை மாத்திரம் கவனித்தால் இத்தகைய நிலை உருவாகும். ஆனால் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட பல பொருள்களின் அடிப்படையிலும் கூட்டுச் சராசரி கொள்கையிலும் கணிக்கப்படும் குறியீட்டெண்களில் இவ்வித நிலை வராது. குறியீட்டெண் கணிப்பதில் பயன் படுத்திய இரு வாய்பாடுகளுடன் இதைப் பொருத்திப் பார்ப் போம்.

அ. அடிப்படையாண்டு அளவை எடையாகக் கொண்ட முறை (பாஸ்சஸ் முறை)

$$IP = \frac{\Sigma\, p_n q_o}{\Sigma\, p_o q_o}$$

வாய்பாட்டில் உள்ள p & q என்ற காரணிகளை மாற்றுவோம்

$$IQ = \frac{\Sigma\, q_n P_o}{\Sigma\, q_o p_o}$$

இது அடிப்படையாண்டு விலையை எடையாகக் கொண்டு கணிக் கும் அளவு குறியிட்டெண்ணாகும். இவ்விரு குறியீட்டெண் களின் பெருக்குப் பலன்

$$p = IP \times IQ = \frac{\Sigma\, p_n q_o}{\Sigma\, p_o q_o} \times \frac{\Sigma\, q_n p_o}{\Sigma\, p_o q_o}$$

முன்பு போல் $P \neq \frac{\Sigma\ p_n q_n}{\Sigma\ p_o q_o}$ க்கு சமமில்லை

என்பதைக் காண்போம்.

பெருக்குப் பலன் 1க்குச் சமமில்லை.

ஆ. நடப்பாண்டு அளவை எடையாகக் கொள்ளல்

$$IP = \frac{\Sigma\ p_n\ q_n}{\Sigma\ p_o\ q_n}$$

p, q என்ற எழுத்துக்களை எதிர் மாற்றுவோம். வாய் பாடு கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$IQ = \frac{\Sigma\ q_n p_n}{\Sigma\ q_o p_n}$$

இது நடப்பாண்டு விலையை எடையாகக் கொண்டு கணித்த அளவு குறியிட்டெண்ணாகும். இரண்டின் பெருக்குப் பலன்

$$\frac{\Sigma\ p_n q_n}{\Sigma\ p_o q_n} \times \frac{\Sigma\ q_n p_n}{\Sigma\ q_0 p_n}$$

இவற்றின் பெருக்குப் பலன் கீழே உள்ள வாய்ப்பாடு விளக்கும் செலவிற்கான குறியிட்டெண்ணாயிருக்காது.

$$\frac{\Sigma\ P_n q_n}{\Sigma\ P_o q_o} \neq P$$

பெருக்குப் பலன்கள் 1க்கு சமமாகயிருக்காது.

நாம் நடைமுறையில் குறியிட்டெண் கணிப்பிற்காக கை யாளும் இரு வாய்பாடுகளும், கால மாற்றுச் சோதனை மற்றும் காரணி மாற்றுச் சோதனை என்ற இரு சோதனைகளுக்கும் ஒத்து வரவில்லை என்பதைக் கண்டோம். ஆனால் அதே சமயத்தில் பிசரின் குறியிட்டெண் இவ்விரு சோதனைகளுக்கு ஏற்றதாக யிருக்கும் என்பதையும் காண்போம். இதன் காரணமாகவே, இக்குறியீட்டெண் சீரிய குறியீட்டெண் என்று அழைக்கப்படு கின்றது.

காரணி மாற்று சோதனையை முதலில் பார்க்கலாம்.

$$\text{வாய்பாடு} = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_n q_o}{\Sigma\, p_o q_o} \times \frac{\Sigma\, P_n q_n}{\Sigma\, P_o q_n}}$$

காரணிகளான p, q என்பவற்றை மாற்றியமைப்போம். அவற்றின் பெருக்குப்பலன்

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_o q_n} \times \frac{\Sigma p_o q_n}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_n q_o}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\, p_n q_n}{\Sigma\, p_o q_o} \times \frac{\Sigma\, q_n p_n}{\Sigma\, q_o p_o}}$$

$$= \frac{\Sigma\, p_n q_n}{\Sigma\, p_o q_o}$$ இது செலவிற்கான குறியீட்டெண்ணாகும்.

தற்போது குறியீட்டெண்கள் பல துறைகளால் வெளியிடப்படுகின்றன. அவைகளில் குறிப்பிடத்தக்கவை :

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்

மொத்த விலைக் குறியீட்டெண்

விவசாய உற்பத்திக் குறியீட்டெண்

தொழில் உற்பத்திக் குறியீட்டெண் என்பனவாகும்.

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண் கணிப்பு (Cost of Living Index Numbr)

பொருள்களின் விலை என்றும் ஒன்று போல் நிலைத்து நில்லாது மாறிக் கொண்டேயிருக்கும் என்பது தெரிந்ததே. எனவே, பொருள்களின் விலை மாற்றத்தால் மக்களின் வாழ்க்கைச் செலவு எவ்வாறு வேறுபடுகிறது என்பதை அறிய வேண்டியவர்களாகயுள்ளோம். இதை வாழ்க்கைச் செலவு குறியிட்டெண் மூலமாக அளவிடலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட வாழ்க்கைத் தரத்தைத் தொடர்ந்து நடத்துவதில் விலை மாற்றங்களால் ஏற்படும் சராசரி நிலையை அளந்தாய்வதற்குப் பயன்படும் கருவியே வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டெண்ணாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட மக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட வாழ்க்கைத் தரத்தையே வெவ்வேறு காலங்களில் தொடர்ந்து

கைக்கொள்வதற்கு, எவ்வளவு செலவு செய்ய வேண்டியுள்ளது என்பதை ஒப்பிட்டறிவதே இம்முறை எனலாம்.

வெவ்வேறு விதமான மக்கள் வெவ்வேறு விதமான பொருள்களைப் பயன்படுத்துவர். ஒரே குறிப்பிட்ட பொருளாயினும் ஒரே அளவில் பலர் பயன்படுத்துவதில்லை. எனவே விலை மாற்றத்தால் ஏற்படும் வாழ்க்கைச் செலவின் அளவை அறிய வெவ்வேறு மக்களுக்கு வெவ்வேறு குறியிட்டெண் கணிக்கப்படுவதுண்டு. இடத்திற்கு இடம் நுகர்வோர் தன்மை மாறுவதால் ஒரே பொருளை ஒரே விதமான மக்கள் பயன்படுத்திய போதிலும், அவர்களின் நுகரும் தன்மை மாறுவதன் காரணத்தால் வெவ்வேறு விதமான குறியீட்டெண் வெவ்வேறு இடங்களுக்கு ஒரே விதமான மக்களுக்குக் கணிக்க வேண்டியுள்ளது.

வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண்கள் உண்மையான வாழ்க்கைச் செலவை அவ்வாறே காட்டா என்பதை உணர்ந்து கொள்ள வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட மக்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட வாழ்க்கைத் தரத்தை அனுபவிப்பதற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தோடு ஒப்பிடும் போது அதிகம் செலவு செய்ய வேண்டியுள்ளதா அல்லது குறைத்துச் செலவு செய்ய வேண்டியுள்ளதா என்பதைத் தான் குறிக்கும். மேலும், இது ஒரு அடிப்படைக் காலத்துடன் ஒப்புநோக்கும் போது ஏற்படும் தராதர வேறுபாட்டையே குறிப்பதாகும். இது ஓர் இடத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட கால நிலையை அதே இடத்தில் முன் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தோடு ஒப்பீடு செய்து கிடைக்கும் ஒரு ஒப்பளவாக இருப்பதால், வெவ்வேறு இடங்களில் உள்ள வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண்களை நேரடியாக ஒப்பீடு செய்து வாழ்க்கைச் செலவினத்தை முடிவு செய்வது நல்லதன்று. இரு இடங்களில் உள்ள மாற்றங்களை ஒப்பீடு செய்யலாமேயல்லாது செலவினத் தொகையைக் குறிப்பிடுவதாகக் கருதி செலவினத் தொகையை நேரடியாக ஒப்பீடு செய்ய முடியாது. ஏனெனில் இரு இடங்களிலும் ஒரே அடிப்படைக் காலத்தில் உள்ள செலவினத் தொகை ஒன்று போல் சமமாகயிராது.

வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண் அமைப்பு

வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண் கணிப்பில் ஐந்து நிலைகள் உள்ளன. (1) எத்தகைய மக்களுக்குக் குறியீட்டெண் கணிக்க வேண்டுமென்பதை உறுதி செய்ய வேண்டும்.

(2) அடிப்படைக் காலத்தைக் குறித்து தெளிவு வேண்டும்.

(3) எத்தகைய பொருள்களைக் கணக்கில் கருத வேண்டும் என்பதைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும். (4) எந்தெந்தப் பொருள்களுக்கு எத்தகைய எடைகளைக் கொடுக்க வேண்டுமென்பதையும் முடிவு செய்ய வேண்டும். (5) சில்லறை விலைகளைச் சேகரிப்பது.

(1) எத்தகைய மக்களுக்கு வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண் கணிப்பது என்பது குறித்து முடிவு செய்தல்

விவசாயத் தொழிலாளர்களுக்கா அல்லது ஆலைத் தொழிலாளர்களுக்கா அல்லது அரசினர் அலுவலர்களுக்கா என எத்தகைய சாராருக்கு வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண் கணிக்க வேண்டியுள்ளது என்பதை முதலில் மிகவும் தெளிவாக முடிவு செய்தாக வேண்டும். மக்களை மாத்திரமல்லாது எந்த இடத்தில் வசிக்கும் மக்களுக்கு என்பதையும் முடிவு செய்ய வேண்டும்.

(2) அடிப்படைக் காலத்தை அல்லது ஆண்டை (base year) முடிவு செய்தல்

குறியீட்டெண் ஓர் ஒப்பளவாகயிருப்பதால், நடப்புக் காலச் செலவினத்தை எந்த ஆண்டுடன் ஒப்பீடு செய்ய வேண்டுமென்பது குறித்துத் தெளிவாக முடிவு செய்ய வேண்டும். பொதுவாக, அடிப்படை ஆண்டாக தெரிந்தெடுக்க வேண்டிய காலத்தில் எதிர்பாராத காரணங்களால் விலைவாசி மிகவும் பாதிக்கப்படாத நல்லதோர் சமநிலையில் இருக்க வேண்டும்.

(3) குறியீட்டெண் கணிப்பில் இடம்பெற வேண்டிய பொருள்களைத் தெரிந்தெடுத்தல்

அடிப்படையாண்டைத் தெரிந்தெடுத்த பின்னர், நமது குறியீட்டெண் கணிப்பில் எந்த எந்த பொருள்கள் இடம் பெற வேண்டுமென்பதையும் முடிவு செய்ய வேண்டும். பொதுவாக இது அந்த மக்களின் குடும்பச் செலவின் ஆய்வு (Family Budget Survey) மூலமாகத்தான் முடிவு செய்யப்படும். இதற்கு எல்லா மக்களிடமிருந்தும் விவரங்களை ஒரு முழு ஆய்வு மூலம் சேகரிக்க முடியாததால், மாதிரி ஆய்வு பயன்படுத்தப்படும். தனி நபர்களின் விருப்பு, வெறுப்புகளைத் தவிர்ப்பதற்காக மாதிரிகள் எதேச்சை எண்கள் மூலமாகவே தெரிந்தெடுக்கப்படும். ஆய்வின் முதல் நோக்கம் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவில் உள்ள சராசரிக் குடும்பத்தினர் ஒவ்வொரு பொருளிலும் எவ்வளவு செலவு செய்

கின்றனர் என்றறிவதே. பல்வேறு பொருள்களின் செலவினங்களைக் கீழ் கண்டவாறு ஐந்து பெரும் பிரிவுகளில் அடக்குவோம்.

1. உணவுப் பொருள்
2. உடை
3. வீட்டு வாடகை
4. எரி பொருள்
5. இதர பல்வகையினம்

இப்பெரும் பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் மேலும் சிறு சிறு பிரிவுகளாகப் பகுக்கப்படும். இத்தகைய பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் பல பொருள்களைக் கொண்டதாகயிருக்கும். குடும்பச் செலவின் ஆய்வு கீழ்கண்ட விவரங்களைத் தருவதாக அமையும்.

1. மக்கள் பயன்படுத்தும் பொருள்களின் தன்மை, தரம் மற்றும் அளவு என்ற விவரங்களைத் தரும்.
2. அப்பொருள்களின் சில்லறை விலைகள்
3. ஒரு பிரிவில் உள்ள ஒரு பொருளின் மீதுள்ள செலவு, அப்பொருளடங்கிய பிரிவின் மொத்தச் செலவினத்தின் எத்தகைய விகிதமாக உள்ளது என்ற விவரம்
4. எல்லாப் பிரிவுகளிலும் உள்ள மொத்தச் செலவின் ஒரு குறிப்பிட்ட செலவின் விகிதாசாரம்

இத்தகைய விவரங்களினால், குறியீட்டெண் கணிப்பில் இடம் பெறும் பொருள்களை முதலில் வரிசைப்படுத்துவர். நாம் தெரிந்தெடுத்துள்ள பொருள்கள் எத்தகைய மக்களுக்காக குறியீட்டெண் தயார் செய்யப்படுகிறதோ அத்தகைய மக்கள் பொதுவாக வாங்கி அனுபவிப்பதாகயிருக்க வேண்டும். இவ்வாறு பல்வேறு குடும்பங்களின் செலவினப் பட்டியல் தயார் செய்த பின்னர் ஒரு சராசரி குடும்பத்தின் செலவினப் பட்டியல் தயார் செய்யப்பட வேண்டும். இத்தகைய சராசரிக் குடும்பச் செலவினப் பட்டியலே அக்குடும்ப மக்களுக்கான அடிப்படைப் பட்டியலாகக் கருதப்படும்.

சில்லறை விலை விவரச் சேகரிப்பு

பெருவாரியான மக்கள் பொருள்களைச் சில்லறையாகவே வாங்குவதால் விலை குறியீட்டெண் கணிப்பில், பொருட்களின் மொத்த விலையைக் கருதாது சில்லறை விலையையே பயன் படுத்தப்படும். ஆனால் சில்லறை விலை சேகரிப்போ சிரம மானதும் தொல்லையுடையதுமாகும். மேலும் ஒரு பொருளின் சில்லறை விலை ஒரே இடத்தில் கடைகள் தோறும் பெரும் பாலும் வேறுபடுவதாகவுமிருக்கும்.

எனவே சில்லறை விலை விவரச் சேகரிப்பில் தனிக் கவனம் செலுத்த வேண்டும். மக்கள் தங்கள் தேவைக்குரிய பொருட் களை அதிகமாக எந்தக் கடைகளில் வாங்குகிறார்களோ அந்தக் கடைகளிலிருந்தே விலை விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட வேண்டும். மேலும் நாம் சேகரிக்கும் விலை விவரம் உண்மை நிலையைப் பிரதிபலிப்பதாகயிருக்க வேண்டும். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளில் எந்தத் தரத்தை மக்கள் அதிகமாக வாங்குகிறார்களோ அந்தத் தரத்தின் விலையையே நாம் சேகரிக்க வேண்டும். விலை விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கென பயிற்சி பெற்ற நபர்களால், வியாபாரம் நடப்பதை நேரில் கண்டறிந்த பின்னர்தான் விலை விவரங்களைச் சேகரிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு பொருளின், பல்வேறு கடைகளிலிருந்து சேகரிக்கப் பெற்ற, விலை களிலிருந்து விவரங்கள் தொகுக்கப் பெற்று பின்னர் சராசரி விலை விவரம் நிர்ணயிக்கப்படும்.

எடை நிர்ணயம் செய்தல்

வெவ்வேறு வகையான மக்களின் தேவைக்கான பொருள் களின் முக்கியத்துவம் ஒரே சீராக இல்லாமல் வேறுபடும். எனவே வாழ்க்கைத் தர செலவு குறியீட்டெண், பொருள்களின் முக்கியத் துவத்திற்குத் தகுந்தவாறு கணிக்கப்படும். ஒவ்வொரு பொரு ளின் முக்கியத்துவம், அப்பொருளின் மீது செய்யப்படுகிற மொத்தச் செலவைப் பொறுத்திருக்கும். சில வேளைகளில் அதன் முக்கியத்துவம் அப்பொருளின் அளவைப் பொறுத்திருக் கும். ஆனால், பொருளின் செலவின் அடிப்படையிலோ அல்லது அளவின் அடிப்படையிலோ நிர்ணயம் செய்யப்படுவது குடும்பச் செலவின் ஆய்வில் சேகரித்த விவரங்களின் அடிப்படை யில் தான் என்று கூறலாம்.

குறியீட்டெண் கணிப்பு

பொதுவாக லெஸ்பியர் விதியே குறியீட்டெண் கணிப்பில் பயன்படுகிறது.

$$\text{குறியீட்டெண்} = \frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times 100$$

இம்முறையில் அடிப்படையாண்டில் உள்ள பொருள்களின் அளவே எடையாகப் கொள்ளப்படுகின்றது. நடப்பாண்டில் உள்ள பொருள்களின் விலை விவரத்தை அடிப்படையாண்டு அளவால் பெருக்கி, பொருள்களின் நடப்பாண்டிற்குரிய விலை மதிப்பை கணக்கிடுவார்கள். இவ்வாறு எல்லாப் பொருள்களின் மொத்த விலை நடப்பாண்டில் கணக்கிடப்படும் $\Sigma P_n q_o$. இம் மாதிரியே பொருள்களுக்குரிய அடிப்படையாண்டின் மொத்த விலை மதிப்பும் கணக்கிடப்படும். ஆனால் அடிப்படையாண்டிற்குரிய பொருள்களின் மொத்த விலை மதிப்பு குடும்பச் செலவின் ஆய்வறிக்கையிலிருந்தே கிடைத்துவிடும். பின்னர் நடப்பாண்டின் மொத்தச் செலவு அடிப்படையாண்டு மொத்தச் செலவால் வகுப்பப் பெற்று 100 கொண்டு பெருக்கப்படும். இதுவே நடப்பாண்டிற்குரிய விலைக் குறியீட்டெண்ணாகும். இது மொத்தக் கூட்டுச் செலவு முறை என்றழைக்கப்படும்.

இவ்வாறு மொத்தச் செலவு முறையைப் பயன்படுத்தி, விலையின் ஒப்பளவுகளைப் பயன்படுத்தியும் கணிக்கலாம். இந் நிலையில் வாய்பாடும் கீழ் கண்டவாறு மாறும்.

$$\text{குறியிடு} = \frac{\sum \frac{P_n}{p_o} \times p_o q_o}{\sum p_o q_o} \times 100 = \frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma p_o q_o} \times 100$$

இம்முறையில் கணிக்கப்பெறும் குறியீட்டெண்; அடிப்படையாண்டில் உள்ள செலவை எடையாகக் கொண்டு கணிக்கப் பெற்ற சராசரி எடை கொள் விலை ஒப்பளவுகளாகும்.

இம்முறையில் ஒவ்வொரு பொருளின் விலை மதிப்பும் நாம் முன்பு கூறியது போல் கணிக்கப் பெறுவதில்லை. மாறாக, ஒரு பொருளின் நடப்பாண்டு விலை வீதம் $\left(\frac{P_n}{P_o}\right)$ அப்பொருளின்

அடிப்படையாண்டு விலை வீதத்தால் $\left(\frac{P_o}{P_o}\right)$ வகுக்கப்பெற்று விலை வீதத்தின் ஒப்பளவாக மாற்றப்படும். பின்னர் அடிப் படையாண்டில் அப்பொருளுக்குரிய மொத்தச் செலவுத் தொகை யை எடையாகக் கொண்டு அவ்வெடையால் விலை ஒப்பளவு பெருக்கப்படும். இவ்வாறுள்ள எடை எப்போதும் நிரந்தர மாகவேயிருக்கும். பெருக்கிக் கிடைத்த அளவுகள் கூட்டப் பெற்று கூட்டிக் கிடைத்த மொத்தத் தொகையை அடிப்படை யாண்டில் உள்ள மொத்தச் செலவால் வகுக்கப்பெறும். இவ் வாறு கிடைத்த விகித அளவு 100 கொண்டு பெருக்கப்பெற்று வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண் கணிக்கப்பெறும். இது அடிப்படையாண்டில் செலவின் நூற்றுமான அளவில் கொடுக்கப்பெறும். இவ்விரு முறைகளிலும் கிடைத்த மதிப்புகள் ஒன்றே. விளக்கத்திற்காக ஓர் எடுத்துக் காட்டு கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. (அடுத்த பக்கம்)

இரட்டிப்பு எடை (Double weight)

பொதுவாக, வாழ்க்கைச் செலவின் குறியீட்டெண் இருபடி அல்லது இருமடி எடை முறையில் கணிக்கப்பெறுகிறது. பொருள்கள் யாவும் கீழ் கண்டவாறு ஐந்து பிரிவுகளாக பிரிக்கப் படுகின்றன.

1. உணவுப் பொருள்
2. உடை
3. வீட்டு வாடகை
4. எரி பொருள்
5. இதர பல்வகை யினம்

முதலில், ஒவ்வொரு பிரிவிற்காக குழுக் குறியீட்டெண் கணிக் கப்படுகிறது. பின்னர் ஒவ்வொரு குழுவிற்குரிய குறியீட்டெண் அக்குழுவிற்குரிய எடையால் பெருக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு குழுவிற்குரிய குறிப்பிட்ட பிரிவின் எடை அப்பிரிவிற்குரிய செலவு எல்லாப் பிரிவிற்குரிய மொத்தச் செலவின் விகிதாசாரத் தைப் பொறுத்ததாக இருக்கும். இவ்வாறு எல்லாப் பிரிவிற் குமுரிய எடை கொள் குறியீட்டெண்களின் கூட்டு எல்லாப் பொருள்களின் எடைகொள் குறியீட்டெண்ணாகும்.

எடைகொள் முறையில் குறியீட்டெண் முறை

பொருள்களின் வரிசை எண்	அடிப்படை ஆண்டு விலை ரூ. p_0	நடப்பாண்டு விலை ரூ. p_n	விலையின் ஒப்பளவு p_n p_0	அடிப்படை ஆண்டில் உள்ள செலவு ரூ.	மொத்தச் செலவின் நூற்றுமானம் w	விலையின் ஒப்பளவு × செலவின் சதவீதம் $\frac{p_n}{p_0} \times w$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	10	15	1.50	300	20	30.00
2	8	10	1.25	240	16	20.00
3	6	9	1.50	120	8	12.00
4	4	5	1.25	90	6	7.50
5	7	14	2.00	60	4	8.00
6	5	6	1.20	90	6	7.20
7	10	12	1.20	90	6	7.20
8	6	9	1.50	75	5	7.50
9	12	15	1.25	45	3	3.75
10	7	21	3.00	60	4	12.00
11	10	15	1.50	120	8	12.00
12	5	10	2.00	60	4	8.00
13	5	6	1.20	60	4	4.80
14	3	6	2.00	30	2	4.00
15	2	3	1.50	60	4	6.00
	மொத்தம்		23.85	1500	100	149.95

பயிற்சி

(1) குறியீட்டெண் கணிக்க

	அடிப்படை ஆண்டு விலை ரூ	நடப்பாண்டு விலை ரூ		அடிப்படை ஆண்டு விலை ரூ	நடப்பாண்டு விலை ரூ
(i)	20	30	(ii)	10	12
	26	39		15	20
	30	45		20	25
	22	35		25	30
	25	36		30	35

(2) பாஸ்சஸ், லெஸ்பியர் விதிகளைப் பயன்படுத்தி விலை குறியீட்டெண் கணிக்க

	அடிப்படை ஆண்டு விலை ரூ	அடிப்படை ஆண்டு அளவு		நடப்பாண்டு விலை ரூ	நடப்பாண்டு அளவு
(1)	5	5	(ii)	6	4
	6	6		9	5
	9	2		15	2
	12	1		16	2
	8	3		16	5

(3) மேலே கூறியுள்ள விவரங்களுக்கு பிசரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கணிக்க

கலைச்சொற்கள்

(English — தமிழ்)

அத்தியாயம் 1

மைய நிலைப் போக்கு அளவுகள்
MEASURES OF CENTRAL TENDENCY

Arithmetic Mean	கூட்டுச் சராசரி
Assumed value	விருப்பளவு அல்லது எதேச்சை மதிப்பு
Antilogarithm	எதிர் மடக்கை
Base	அடிப்படை
Bi-modal	இருமுகட்டு வரிசை
Calculation method	கணிப்பு முறை
Changing the base	அடிப்படை மாற்றம்
Changing the scale	அளவை மாற்றம்
Continuous	தொடர்புடைய
Co-ordinates	இணைக் கம்பங்கள்
Deviation	விலக்கம்
Deciles	பதின்மம்
Direct Method	நேர்முறை
Discrete	தொடர்பற்ற
First quartile	முதல் கால்ம அளவு
Geometric Mean	பெருக்கல் சராசரி
Harmonic Mean	தலைகீழ் சராசரி அல்லது இசைச் சராசரி
Locational or Positional or Central Average	இடச் சராசரி அல்லது மையச் சராசரி
Logarithm	மடக்கை
Measures of Location	மைய நிலைப் போக்கு அளவுகள் அல்லது நிலை அளவுகள்

Mean	சராசரி
Median	நடுவன் (இடைநிலை அளவு)
Mode	மோடு அல்லது முகடு
Mean of Combinations or Combined Mean	குழுக்களின் சராசரி
Mid-value	மைய மதிப்பு
Modal class	முகட்டுடைப் பிரிவு
Multi Modal (series)	பல் முகட்டு (வரிசை)
Negative (-)	எதிர் மறை
Parallel Line	இணைக் கோடு
Perpendicular line	செங்குத்துக் கோடு
Percentile	சத அளவு (நூற்று மானம்)
Positive (+)	நேர்
Positions of items	உறுப்புகளின் இட நிலைகள்
Power	அடுக்கு (திறன்)
Simple Mean	எளிய சராசரி
Shortcut Method	சுருக்கு முறை
Square root	வர்க்க மூலம் (இருபடி மூலம்)
Symmetrical	சமச் சீர்புடைய
Third quartile	மூன்றாம் கால்ம அளவு
Tri-modal (series)	மும்முகட்டளவு (வரிசை)
Ungrouped	செப்பனிடா (தரப்படுத்தாத)
Unimodal (series)	ஏகமுகட்டு (வரிசை)
Weighted Mean	நிறையிட்ட சராசரி

அத்தியாயம் 2

சிதறலளவுகள்
MEASURES OF DISPERSION

Absolute value	தனி மதிப்பு
Central moment	மையப் பெருக்குச் சுழல் திறன்

Co-efficient of variation	வேறுபாட்டு விழுவெண் அல்லது வேறுபாட்டுக் கெழுவெண் அல்லது வேறுபாட்டுத் துணை எண்
Co-efficient of dispersion	சிதறல் கெழு
Co-efficient of Range	வீச்சுக் கெழு
Co-efficient of Quartile deviation	கால்மச் சிதறல் கெழு
Co-efficient of Skewness	சீரின்மைக் கெழுவளவு
Equation	சமன்பாடு
Expansion	விரிவாக்கம்
Kurtosis	தட்டை அளவு அல்லது கூரளவு
Lepto Kurtic	குன்றத் தட்டை
Mean Deviation	சராசரி வேறுபாடு அல்லது சராசரி விலகல்
Measures of dispersion	சிதறலளவுகள்
Mean Square Deviation	சராசரி விலக்க வர்க்கம்.
Moment of Frequency distribution	அலைவெண் பரவலின் பெருக்குச் சுழல்திறன்
Meso Kurtic	மத்திமத் தட்டை
Negative skewness	எதிர் சீரின்மை
Normal curve	ஒழுங்கு வளைகோடு, இயற்கோடு
Original value	மூல மதிப்பு
Positive skewness	நேர் சீரின்மை
Plato Kurtic	தட்டைச் சீரின்மை
Quartile Deviation	கால்ம அளவு விலக்கம்
Range	வீச்சு
Retrospect	மீள் பார்வை
Relative measures	உறவு அளவுகள் அல்லது ஒப்பளவுள்
Root Mean Square Deviation	சராசரி விலக்க வர்க்கத்தின் வர்க்க மூலம்
Raw moment	தரப்படுத்தாத பெருக்குச் சுழல் திறன்

Standard Deviation	திட்ட விலக்கம், மூல விலக்கம்
Skewness of frequency distribution	அலைவெண் பரவலில் கோணல்
Variance	விலக்க வர்க்கச் சராசரி

அத்தியாயம் 3

உடன் தொடர்பு
CORRELATION

Correlation	உடன் தொடர்பு அல்லது ஒட்டுறவு அல்லது இடையுறவு
Correlation table	உடன் தொடர்பு அட்டவணை
Co-efficient of Correlation	உடன் தொடர்பு கெழு
Causes and Effect	காரண காரிய உறவு
Dependent Value	சார்பளவு
General relationship	பொது உறவு
Independent Value	சுய அளவு
Mutual relationship	பரிமாற்ற உறவு
Negative Correlation	எதிர்த் தொடர்பு
Positive Correlation	நேர்த் தொடர்பு
Perfect Positive Correlation	சம நேர்த் தொடர்பு

அத்தியாயம் 4

திரிபுகளின் போக்கு
REGRESSION

Error of estimate	மதிப்பீட்டுக் குறை அல்லது தோராய மதிப்புப் பிழை
Regression	திரிபுகளின் போக்கு

Standard Deviation	திட்ட விலக்கம், மூல விலக்கம்
Skewness of frequency distribution	அலைவெண் பரவலில் கோணல்
Variance	விலக்க வர்க்கச் சராசரி

அத்தியாயம் 3

உடன் தொடர்பு
CORRELATION

Correlation	உடன் தொடர்பு அல்லது ஒட்டுறவு அல்லது இடையுறவு
Correlation table	உடன் தொடர்பு அட்டவணை
Co-efficient of Correlation	உடன் தொடர்பு கெழு
Causes and Effect	காரண காரிய உறவு
Dependent Value	சார்பளவு
General relationship	பொது உறவு
Independent Value	சுய அளவு
Mutual relationship	பரிமாற்ற உறவு
Negative Correlation	எதிர்த் தொடர்பு
Positive Correlation	நேர்த் தொடர்பு
Perfect Positive Correlation	சம நேர்த் தொடர்பு

அத்தியாயம் 4

திரிபுகளின் போக்கு
REGRESSION

Error of estimate	மதிப்பீட்டுக் குறை அல்லது தோராய மதிப்புப் பிழை
Regression	திரிபுகளின் போக்கு

Regression Line	உடன் தொடர்பு கோடு
Regression Equation	உடன் தொடர்பு சமன்பாடு
Regression Co-efficient	தொடர் போக்கின் கெழு

அத்தியாயம் 5

வரிசைத் தொடர்பு
RANK CORRELATION

Rank	வரன் முறை, வரிசை அல்லது தரம் அல்லது மதிப்பிடம்
Ranking	வரிசை முறை அல்லது தரப் படுத்துதல்
Rank Correlation	வரிசைத் தொடர்பு

அத்தியாயம் 6

குறியீட்டெண்
INDEX NUMBERS

Aggregate Method	கூட்டு முறை
Arithmetic average	கூட்டுச் சராசரி
Average Price Relatives	சராசரி விலை விகிதம்
Base year	அடிப்படையாண்டு
Current year	நடப்பாண்டு
Chain based index number	சங்கிலித் தொடர் குறியீட் டெண்
Commodity Reversal Test	பொருள் மாற்றுச் சோதனை

Cost of Living Index	வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டெண்
Consumer Price Index	நுகர்வோர் விலை குறியீட்டெண்
Double Weight	இரட்டிப்பு எடை
Factor Reversal Test	காரணிகள் மாற்றுச் சோதனை
Fixed Base Index Number	நிலையான அடிப்படையாண்டு குறியீட்டு எண்
Family Budget Survey	குடும்பச் செலவாய்வு
Geometric Average	பெருக்கற் சராசரி
Group Index Number	குழுவிற்குரிய குறியீட்டெண்
Index Number	குறியீட்டெண்
Index Numbers for special purposes	தனிநோக்கக் குறியீட்டெண்
Ideal Index Numbers	சீரிய குறியீட்டெண்
Index Number on Agricultural Production	விவசாய உற்பத்திக் குறியீட்டெண்
Index Number on Industrial Production	தொழில் உற்பத்திக் குறியீட்டெண்
Measures of Comparison	ஒப்பளவு
Price Index Number	விலைக் குறியீட்டெண்
Price Relative	விலை விகிதம்
Price weights	விலை எடைகள்
Quantity Index Number	அளவு விலைக் குறியீட்டெண்
Quantity relative	அளவு விகிதம்
Quantity weight	அளவு எடை
Rate per unit	விலை வீதம்
Reciprocals	தலை கீழ் விகிதம்
Retail Price	சில்லறை விலை

Simple aggregate method	எளிய கூட்டு முறை
Simple average of relatives	விகிதங்களின் எளிய சராசரி
Sort	தரம்
Type of Weights	எடை வகைகள்
Time Reversal Test	கால மாற்றுச் சோதனை
Value Index Number	விலை மதிப்புக் குறியீட்டெண்
Value Weights	விலை மதிப்பு எடைகள்
Weighted Index Number	நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
Wholesale Price Index	மொத்த விலை வாசிக் குறியீட்டெண்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கற்க கசடற